Chapitre 6
Continuité d'une fonction
et théorème des valeurs intermédiaires

I Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction numérique telle qu'il existe un intervalle I (non vide et non réduit à un point) inclus dans D_f.

I.1 Notion de continuité et de discontinuité d'une fonction en un point

a) La définition

Définitions :
(1) Soit $a \in I$, on dit que la fonction f est continue en a si la fonction f tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a, c'est-à-dire si on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

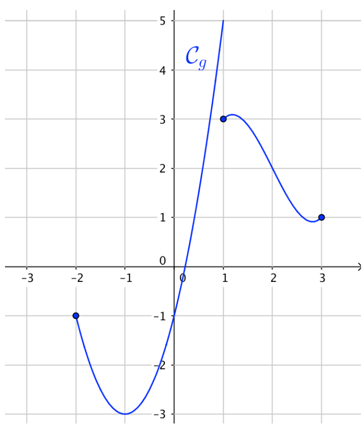
(2) On dit que la fonction f est continue sur I, pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

Remarques :
(a) Soit $a \in D_f$. Si f n'est pas continue en a, on dit que la fonction f est discontinue en a. Dans ce cas, f n'a pas de limite quand x tend vers a.
(b) Si l'ensemble de définition de f est formé d'une union d'intervalles (non vides et non réduits à un point), on peut aussi dire que f est continue sur son ensemble de définition si elle est continue sur tout intervalle contenu dans D_f.

b) Conséquence graphique de la notion de continuité

(1) Cas de continuité : Si la fonction f est continue sur l'intervalle I, alors la partie de la courbe C_f formée par les points dont l'abscisse x appartient à I "ne comporte pas de rupture" : on peut la tracer sans lever le stylo de la feuille.
(2) Cas de discontinuité : Si la courbe C_f comporte une rupture au niveau d'une abscisse a qui appartient à D_f alors on peut dire que la fonction f est discontinue en a.

Illustration



La fonction g est définie sur $[-2\,;3]$ et elle est représentée dans un repère orthonormé par la courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessus. On a : $g(1) = 3$

$$g(1) = 3, \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = 5 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = 3$$

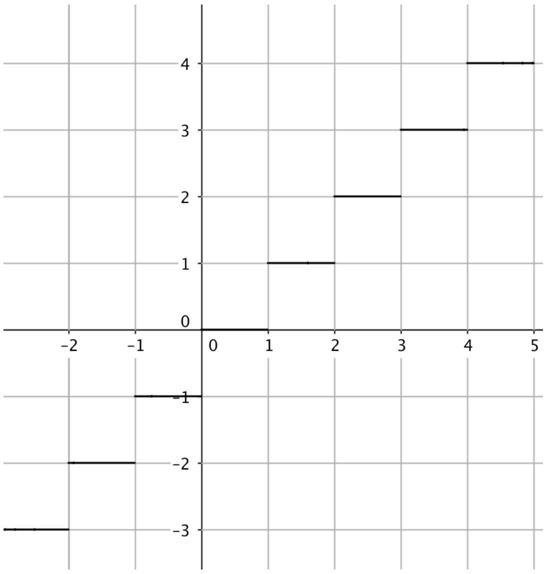
Donc la fonction g n'a pas de limite lorsque x tend vers 1. Cette fonction présente donc une discontinuité en 1.

c) Un cas particulier de fonction comportant des discontinuités : la fonction partie entière

Définitions :
(1) Soit x un réel. On appelle partie entière de x, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note $E(x)$.
(2) La fonction E qui à tout réel x associe sa partie entière est appelée fonction partie entière.

Illustration

La courbe représentative de la fonction E est la suivante :



Propriété : La fonction partie entière est :
- continue sur tous les intervalles de la forme $]k\ ;\ k+1[$ où $k \in \mathbb{Z}$;
- discontinue en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : propriété admise.

I.2 Dérivabilité et continuité

Propriété : Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration : Soit a un réel appartenant à I. La fonction f est dérivable en a et on a donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Or, pour tout x tel que $x \in D_f$ et $x \neq a$, on a :

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a)$$

On a

* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

* $\lim_{x \to a} x - a = 0$
Donc par produit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) = 0$$

Et par somme

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est donc continue en a. Puisque ceci est vrai pour tout $a \in I$ la fonction f est continue sur I.

]]

Remarque : La réciproque est fausse. Nous verrons plus bas que la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée sont toute deux continues en 0 mais non dérivables en 0.

Application à deux types usuels de fonction

Définitions :
(1) On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_p x^p$$

où $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont $p + 1$ réels et $a_p \neq 0$.
On dit alors que p est le degré de la fonction polynôme f.
(2) On appelle fonction rationnelle toute fonction h telle qu'il existe deux fonctions polynôme f et g vérifiant les deux conditions suivantes :
* pour tout $x \in D_h$, $g(x) \neq 0$;
* pour tout $x \in D_h$,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Propriété :
(1) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
(2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^p}$, on ne peut pas dire « la fonction f est discontinue en 0 » car 0 n'appartient pas à son ensemble de définition.

Deux autres cas particuliers de fonctions continues

• La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
• La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc par exemple
* $\lim_{x \to 64} \sqrt{x} = \sqrt{64} = 8$
* $\lim_{x \to -5} |x| = |-5| = 5$

Remarque : Puisque ni la fonction racine carrée, ni la fonction valeur absolue ne sont dérivable en 0. Il faudrait démontrer directement à partir de la définition que ces fonctions sont continues en 0.

I.3 Continuité et opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions.

On suppose qu'il existe un intervalle I tel que $I \subset D_f$ et $I \subset D_g$.

Propriétés :
(1) Si f et g sont continues sur I alors la fonction $f + g$ est continue sur I.
(2) Si f et g sont continues sur I alors la fonction $f \times g$ est continue sur I.
(3) Si g ne s'annule pas sur I et f et g sont continues sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Démonstration : On suppose que f et g soient continues sur I. Soit $a \in I$.
f et g sont continues en a, donc on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.
D'après la propriété sur les opérations sur les limites de fonctions, on a alors :
• $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$.
• $\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = f(a) \times g(a) = (f \times g)(a)$.
De plus, si g ne s'annule pas sur I, on a aussi :
• $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$.
Donc les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.
Ceci étant vraies pour tout réel $a \in I$, elles sont donc continues sur I.

]]

Remarque :
(a) Si f est continue sur I alors, pour tout réel k, la fonction kf est continue sur I.
(b) Si g ne s'annule pas sur I et g est continue sur I alors la fonction $\frac{1}{g}$ est continue sur I.
(c) Si f et g sont continues sur I alors la fonction $f - g$ est continue sur I.

I.4 Continuité et composition

Soient
* f et g deux fonctions
* I et J deux intervalles tels que :
* $I \subset D_f$,
* $J \subset D_g$,
* pour tout $x \in I, f(x) \in J$.

Propriété : Si f est continue sur I et g est continue sur J alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration : Soit $a \in I$.
Puisque f est continue sur I, f est continue en a et on a :
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ et } f(a) \in J\,;$$
Puisque g est continue sur J, g est continue en $f(a)$ et on a :
$$\lim_{X \to f(a)} g(X) = g(f(a)).$$
Par composition des limites, on en déduit
$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g(f(a)$$
La fonction $g \circ f$ est donc continue en a.

Ceci étant démontré pour tout réel $a \in I$, $g \circ f$ est continue sur I.

]]

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x - 1}$$

f est continue sur $\left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ comme composée des fonctions continues $x \to 4x^2 + 3x - 1$ et $x \to \sqrt{x}$.

II Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction.
On considère deux réels distincts a et b tels que $a < b$ et $[a\ ;\ b] \subset D_f$

II.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires : Si la fonction f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration : théorème admis.

Remarques :

(a) La formulation "k compris entre $f(a)$ et $f(b)$" permet de traiter dans la même expression les différents cas :

$$f(a) < f(b) \text{ ou } f(b) < f(a) \text{ ou } f(a) = f(b).$$

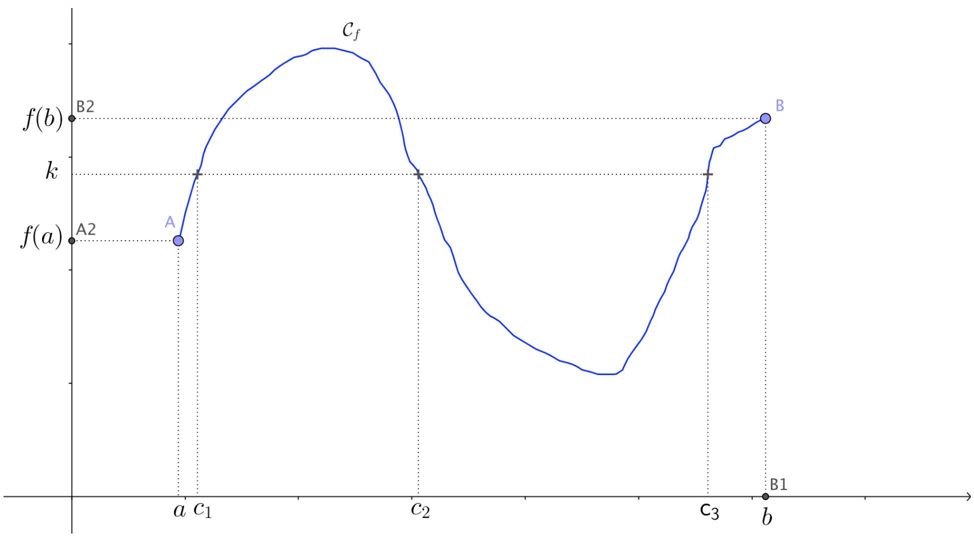
(b) Selon ce théorème, si f est continue sur $[a\ ;\ b]$ alors $f(x)$ prend toutes les "valeurs intermédiaires" comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. La conclusion du théorème peut se formuler de deux autres façons :

* tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par la fonction f dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

* pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet alors au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

(c) Dans le théorème, le réel c tel que $f(c) = k$ n'est pas nécessairement unique.

Illustration



Dans la figure ci-dessus, la fonction f est continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Donc pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution. Ici, elle possède trois solutions c_1, c_2 et c_3.

II.2 Corollaire pour les fonctions strictement monotones

a) Cas d'un intervalle fermé

Corollaire 1 : Si la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un *unique* réel c tel que $c \in [a\ ;\ b]$ et $f(c) = k$.

Démonstration : L'existence d'une solution est établie par le théorème des valeurs intermédiaires.

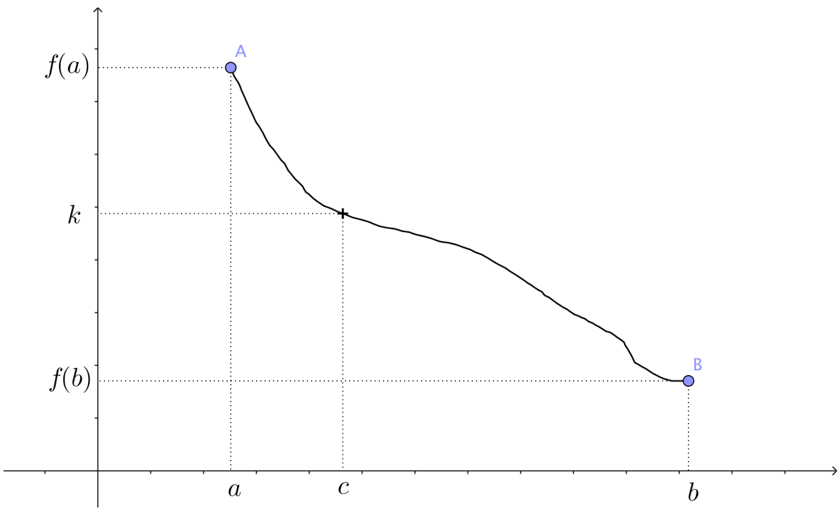
Unicité de la solution : Soient c_1 et c_2 deux solutions de l'équation $f(x) = k$. On a alors :

$$f(c_1) = f(c_2) = k.$$

Mais puisque f est *strictement* monotone, on a alors $c_1 = c_2$.

Remarque : Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet alors une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On dit qu'il y a existence *et* unicité de la solution.

Illustration



b) Cas d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert

* α désigne soit un réel soit $-\infty$;
* β désigne soit un réel soit $+\infty$;
* A et B désignent soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

On suppose de plus que $\alpha < \beta$ et $]\alpha\ ;\ \beta[\subset D_f$.

Corollaire : On suppose que :

* f est continue et strictement monotone sur $]\alpha\ ;\ \beta[$;
* $\lim_{x \to \alpha} f(x) = A$;
* $\lim_{x \to \beta} f(x) = B$.

Alors, pour tout réel k compris entre A et B, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $]\alpha\ ;\ \beta[$.

Remarque : On peut aussi énoncer une propriété analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert de la forme $]\alpha\ ;\ b]$ ou $[a\ ;\ \beta[$

II.3 Un exemple d'application du théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$$

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Tracer le tableau de variations de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 25$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha < -1$.

4. Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de α au centième.

La fonction f est une fonction polynôme de degré 3, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Étude des limites en $-\infty$ et en $+\infty$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, :

$$f(x) = x^3\left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3} = -1$

Donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}.$$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3} = -1$

Donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. Étude des variations de f

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, :

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

f' est un polynôme du 2nd degré. Son discriminant est :

$$\Delta = 6 - 4 \times (-1) \times 9 = 144$$

On a $\Delta > 0$ donc f' possède deux racines :

* $x_1 = \frac{-6-\sqrt{144}}{2\times(-3)} = \frac{-6-12}{-6} = 3$

* $x_2 = \frac{-6+\sqrt{144}}{2\times(-3)} = \frac{-6+12}{-6} = -1$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$				23		
			-9				$-\infty$

3. Nombre de solutions de l'équation $f(\mathrm{x}) = 25$

• Étude sur $]-\infty\,;\ 3]$

D'après le tableau de variations, la fonction f admet pour maximum $f(3) = 23$ sur $[-1\,;\ +\infty[$ et $25 > 23$. Donc l'équation $f(x) = 25$ n'admet pas de solution sur $[-1\,;\ +\infty[$.

• Étude sur $]-\infty\,;\ -1[$

La fonction f vérifie les propriétés suivantes :

* f est continue et strictement décroissante sur$]-\infty\,;\ -1[$;
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-1) = -9$ donc 25 est strictement compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $f(-1)$;

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 25$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;\ -1[$

• Conclusion :

L'équation $f(x) = -25$ comporte une unique solutions α dans $\mathbb{R}$ et $\alpha < -1$.

4. Encadrement au centième de la solution α

* D'après la calculatrice, on a

$$f(-3{,}06) \approx 25{,}2 > 25 \text{ et } f(-3{,}05) \approx 24{,}8 < 25$$

Puisque la fonction f est strictement décroissante et continue sur $]-\infty\,;\ -1[$, on peut en déduire l'encadrement suivant de α :

$$\boxed{-3{,}06 < \alpha < -3{,}05}$$