Chapitre 9
Nombres complexes :
forme trigonométrique et forme exponentielle

Dans ce chapitre, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

I Forme trigonométrique d'un complexe non nul

I.1 Argument

Définition : Soient z un complexe non nul et M son point image. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques :
(a) 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.
(b) Si z est l'affixe d'un vecteur non nul $\vec{w}$, $\arg(z)$ est aussi une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{w})$.
(c) Si θ est une mesure en radians de $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ alors toute mesure de cet angle est de la forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note donc :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \text{ ou } \arg(z) = \theta\ [2\pi].$$

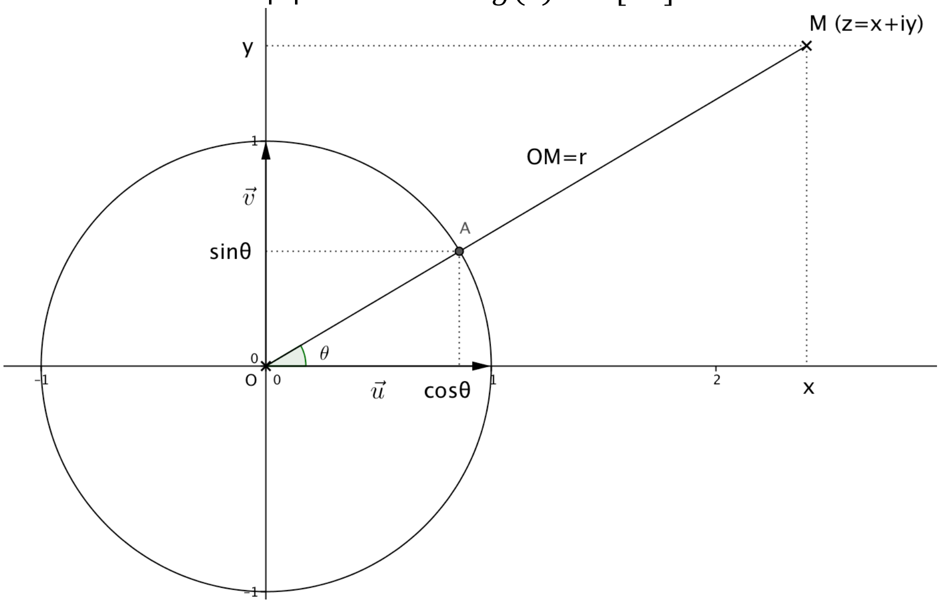
I.2 Forme trigonométrique

Soient z un complexe *non nul* et M son point image. Le point M est donc distinct du point O, origine du repère. On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Les coordonnées de M sont donc $(x\ ;y)$.

Notons
* r la distance OM ;
* θ une mesure (en radians) de angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$

On a donc :

$$|z| = r > 0 \text{ et } arg(z) = \theta[2\pi]$$



Propriétés : On a les égalités suivantes :
(1) $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$
(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
On dit que cette expression est <u>la forme trigonométrique</u> de z.

Démonstration : Soit A le point du cercle trigonométrique associé au réel θ. Donc on a :

$$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA}) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi]$$

Donc $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) = (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OA}) = 0\ [2\pi]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de même sens.
Il existe donc un réel $k > 0$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$$

Mais d'autre part,

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| = \|k\overrightarrow{OA}\| = k\|\overrightarrow{OA}\|$$

Puisque A est sur le cercle trigonométrique, $\|\overrightarrow{OA}\| = 1$. D'où $k = r$.
On en déduit

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont $(x\,;\,y)$ et celles de $\overrightarrow{OA}$ sont $(\cos(\theta)\,;\,\sin(\theta))$. On déduit donc de l'égalité vectorielle les deux égalités suivantes :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta$$

Si on traduit cette égalité sous forme complexe on a alors :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$z = z' \text{ si et seulement si } |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi].$$

Démonstration
(=>) évident.
(<=) On suppose que $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')\ [2\pi]$.
Notons

$$r = |z| = |z'| \text{ et } \theta = \arg(z) = \arg(z')$$

D'après la propriété précédente :
* $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$
* $\mathrm{Re}(z') = r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z') = r\sin\theta$
D'où $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$. Donc $z = z'$.

I.3 Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un complexe non nul

On considère le nombre complexe écrit sous forme algébrique :

$$z = 2\sqrt{3} - 2i$$

On veut écrire le complexe z sous forme trigonométrique.
(1) Calculons son module :

$$|z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

(2) Notons θ un argument de z.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(z) = |z|\cos\theta \\ \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

(3) On en déduit la forme trigonométrique du complexe z :

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

I.4 Propriétés de l'argument d'un complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
On suppose que le complexe z s'écrit sous la forme trigonométrique suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a donc } |z| = r \text{ et } \arg(z) = \theta\ [2\pi]$$

Propriétés : On a les équivalences suivantes :
(1) z est un réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$
(2) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Démonstration :
On a les équivalences suivantes :
(1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \iff r\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \iff \theta = 0\ [2\pi]$ ou $\theta = \pi\ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \theta = 0\ [\pi]$$

(2) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow r\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Propriétés : Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
(1) $arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
(2) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration :
(1) Notons θ' un argument de $-z$.
On a :

$$|-z| = |z| = r\ ;\ \mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z)$$

On en déduit :

$$r\cos(\theta') = -r\cos(\theta) \text{ et } r\sin(\theta') = -r\sin(\theta)$$
$$\iff \cos(\theta') = -\cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta') = -\sin(\theta)$$
$$\iff \cos(\theta') = cos(\theta + \pi) \text{ et } \sin(\theta') = \sin(\theta + \pi)$$
$$\iff \theta' = \theta + \pi\ [2\pi]$$

(2) Notons θ'' un argument de $\bar{z}$.
On a :

$$|\bar{z}| = |z| = r\ ;\ \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$$

On en déduit :

$$r\cos(\theta'') = r\cos(\theta) \text{ et } r\sin(\theta'') = -r\sin(\theta)$$
$$\iff \cos(\theta'') = \cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta'') = -\sin(\theta)$$
$$\iff \cos(\theta'') = cos(-\theta) \text{ et } \sin(\theta'') = \sin(-\theta)$$
$$\iff \theta'' = -\theta[2\pi]$$

II Produit et quotient sur des complexes non nuls : forme trigonométrique et forme exponentielle

II.1 Rappel de quelques égalités utiles en trigonométrie

Propriétés : Soient a et b deux réels. On a les quatre égalités suivantes :
(1) $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$
(2) $\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$
(3) $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$
(4) $\sin(a-b) = \sin a \times \sin b - \cos a \times \sin b$

Démonstration du (2) : Soient a et b deux réels. On note A et B les deux points du cercle trigonométrique respectivement associés à a et à b.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives

$$(\cos a\,;\sin a) \text{ et } (\cos b\,;\sin b)$$

On a alors en utilisant les formules du produit scalaire on a :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

Mais d'autre part,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}\right)$$

Or $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1$ puisque A et B sont deux points du cercle trigonométrique.
Enfin, par relation de Chasles sur les angles orientés :

$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}\right) = a - b\ [2\pi]$$

D'où

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos(a-b)$$

On déduit des deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$:

$$\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

• On déduit l'égalité (1) de l'égalité (2) en écrivant

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \times \cos(-b) + \sin a \times \sin(-b)$$

Et en utilisant la parité des fonctions cosinus et sinus.
• On déduit l'égalité (3) et (4) en écrivant :

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$$

Et en utilisant $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

Propriétés :
(1) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
(2) $\sin(2a) = 2\cos a \times \sin a$

Démonstration : Il suffit de remarquer que $2a = a + a$ et d'utiliser les formules (1) et (3) de la propriété précédente.

II.2 Argument et produit de deux nombres complexes

Lemme 1 : Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Si $z = k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alors

$$|z| = k \text{ et } \arg(z) = \varphi\ [2\pi]$$

Démonstration : On a

$$z = k(\cos\varphi + i\sin\varphi) = k\cos\varphi + ik\sin\varphi$$

D'où

$$|z| = \sqrt{(k\cos\varphi)^2 + (k\sin\varphi)^2} = \sqrt{k^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{k^2 \times 1} = \sqrt{k^2} = k$$

car $k > 0$

D'autre part, si θ est un argument de z, on a alors :

$$z = k(\cos\theta + i\sin\theta) = k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

D'où, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\theta = \cos\varphi \text{ et } \sin\theta = \sin\varphi$$

Ces deux conditions impliquent $\theta = \varphi\ [2\pi]$.

Lemme 2 : Soient θ et θ' deux réels. Alors on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

Démonstration : On développe l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= (\cos\theta \times \cos\theta' - \sin\theta \times \sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta \times \cos\theta' + \cos\theta \times \sin\theta')$$

Or, d'après les formules de trigonométrie rappelées au II.1, on a :

* $\cos\theta \times \cos\theta' - \sin\theta \times \sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$
* $\sin\theta \times \cos\theta' + \cos\theta \times \sin\theta' = \sin(\theta + \theta')$

On a donc :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

Théorème : Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\arg(\mathrm{zz}') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

Démonstration : Posons :

$$|z| = r, |z'| = r', arg(z) = \theta \text{ et } arg(z') = \theta'$$

z et z' s'écrivent donc sous forme trigonométrique de la façon suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

On en déduit :

$$zz' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

D'après le lemme 2, on en déduit :

$$zz' = rr' \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

Or $rr' > 0$. Donc d'après le lemme 1,

* $|zz'| = rr' = |z||z'|$
* $\arg(\mathrm{zz}') = \theta + \theta'[2\pi] = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Corollaires : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

(1) $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')\ [2\pi]$

(2) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(\mathrm{z}^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration : Ces trois égalités se déduisent du théorème précédent.

II.3 Notation exponentielle d'un nombre complexe

a) Une nouvelle notation

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

D'après le lemme 2 de la partie précédente, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $\theta' \in \mathbb{R}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

Ceci s'écrit également :

$$f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$$

On remarque que f vérifie la même équation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Ceci suggère la notation qui suit.

Définition : Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

Propriété : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta\ [2\pi]$$

Propriétés : Si θ et θ' sont deux réels, on a :

(1) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(2) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

(3) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Démonstration : Ce sont des conséquences directes des résultats de la partie argument et opérations.

Remarque : La formule (4) s'écrit également sous forme trigonométrique :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Cette égalité s'appelle la <u>formule de Moivre</u>.

b) Forme exponentielle d'un complexe non nul

Définition : Soit z un complexe non nul de module r et d'argument θ, on a :

$$z = re^{i\theta}$$

On dit que cette expression est la <u>forme exponentielle de z</u>.

Remarque : Si un complexe z s'écrit sous la forme

$$z = re^{i\theta} \text{ où } r > 0$$

alors r est le module et θ est un argument de z.

Exemples :

(a) Soit z le complexe de module $\sqrt{3}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$. On a alors

$$z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(b) On a les cas classiques suivants à connaître :

* $1 = e^{i0}$
* $-1 = e^{i\pi}$
* $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
* $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

II.4 Produit et quotient de complexes exprimés sous formes trigonométrique et exponentielle

Soient z et z' deux complexes non nuls. On note

* r et r' leur module respectif ;
* θ un argument de z et θ' un argument de z'.

On a donc les formes exponentielles et trigonométriques suivantes :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } z' = r'e^{i\theta'} = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

On déduit des résultats donnés précédemment les égalités suivantes, en utilisant les formes exponentielle et trigonométrique :

* $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$
* $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right)$
* $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$
* Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

II.5 Quelques résultats utiles pour l'application géométrique des complexes

a) Complexes et trigonométrie

Propriétés (formules d'Euler) : Soit θ un réel. On a les deux égalités suivantes :
(1) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$
(2) $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Retrouver certaines formules de trigonométrie avec la notation exponentielle

On a :

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

Or
* $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
* $e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$
$= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$= (\cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b)) + i(\cos(a) \times \sin(b) + \sin(a) \times \cos(b))$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités :

$$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$
$$\sin(a+b) = \cos a \times \sin b + \sin a \times \cos b$$

b) Nature d'un triangle

Soient trois points du plan A, B et C d'affixes respectifs a, b et c. On suppose ces points distincts deux à deux.

Propriété
(1) Le module du complexe

$$\frac{c-a}{b-a}$$

est égal au rapport des longueurs $\frac{AC}{AB}$.
(2) L'argument du complexe

$$\frac{c-a}{b-a}$$

est la mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$

Démonstration :
(1) On a :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$$

(2) On a :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$$
$$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}) = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$$

Corollaires :
(1) Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si le complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est de module 1.
(2) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si le complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.
(3) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

Démonstration : On a les équivalences suivantes :
(1)

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AC = AB \Leftrightarrow \text{Le triangle ABC est isocèle en A.}$$

(2)

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \text{Les points A, B et C sont alignés.}$$

(3)

$$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$
$$\Leftrightarrow \text{Le triangle ABC est rectangle en A.}$$