Chapitre 15
Droites et plans
dans l'espace

Principes élémentaires

• Les droites et les plans sont des ensembles de points.
• On dit donc qu'un point A appartient (ou n'appartient pas) à une droite $\mathcal{D}$ ou à un plan et on note :

$$A \in \mathcal{D} \text{ ou } A \in \mathcal{P}$$
$$(\text{ou } A \notin \mathcal{D} \text{ ou } A \notin \mathcal{P})$$

• On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est incluse (ou n'est pas incluse) dans un plan $\mathcal{P}$ ou que le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et on note :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$$
$$(\text{ou } \mathcal{D} \not\subset \mathcal{P})$$

• On admet que :
* une droite contient une infinité de points distincts ;
* un plan contient une infinité de droites distinctes.

1 Définition d'une droite ou d'un plan par des points

Définitions : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
(1) On dit que n points sont alignés s'il existe une droite telle que les n points appartiennent à cette droite.
(2) On dit que n points sont coplanaires s'il existe un plan tel que tous ces points appartiennent à ce plan.

Axiomes :
(1) Si A et B sont deux points *distincts*, il existe une unique droite telle que les points A et B appartiennent à cette droite. Cette droite est appelée la droite (AB).
(2) Si A, B et C sont trois points *non alignés*, il existe un unique plan qui passe par ces trois points. Ce plan est appelé le plan (ABC).
(3) Si deux points distincts A et B appartiennent au plan $\mathcal{P}$ alors la droite (AB) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque : A partir des axiomes (1) et (2) on déduit les deux propriétés suivantes :
* deux points sont nécessairement alignés.
* si $n = 2$ ou $n = 3$ alors les n points sont nécessairement coplanaires.
On en déduit sue :
* trois points non alignés sont distincts deux à deux.
* quatre points non coplanaires sont distincts deux à deux.

Propriété : Soient un point A et une droite $\mathcal{D}$ tels que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$A \in \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$$

Démonstration : Soient B et C deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$.
* Puisque le point A n'appartient pas à $\mathcal{D}$, les points A, B et C sont non alignés. Il existe donc un plan unique $\mathcal{P}$ tel que les points A, B et C appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
* Puisque les points B et C appartiennent à la fois à la droite $\mathcal{D}$ et au plan $\mathcal{P}$, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
* Si un autre plan $\mathcal{P}'$ vérifie $A \in \mathcal{P}'$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}'$ alors puisque $B \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}$ alors $A \in \mathcal{P}'$, $B \in \mathcal{P}'$ et $C \in \mathcal{P}'$. Donc, par l'axiome (2), les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

2 Positions relatives de deux droites

Définition : On dit que deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont <u>coplanaires</u> s'il existe un plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$$

Propriété : Deux droites non coplanaires ont une intersection vide.

Démonstration : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites. On suppose qu'elles ont une intersection non vide. Soit A un point appartenant à cette intersection. Soient B un point de $\mathcal{D}$ distinct de A et C un point de $\mathcal{D}'$ distinct de A. Il existe un plan $\mathcal{P}$ qui passe par A, B et C. On a par l'axiome (3) :
* $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.
* $A \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$.
Ainsi les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
On a démontré que si deux droites ont une intersection non vide alors elles sont coplanaires.
Par contraposée, si deux droites sont non coplanaires, alors elles ont une intersection vide.
Remarque : Nous verrons plus bas que la réciproque est fausse.

Définitions :
(1) On dit que deux droites sont <u>sécantes</u> si leur intersection ne contient qu'un seul point.
(2) On dit que deux droites sont <u>parallèles</u> si elles sont coplanaires et non sécantes

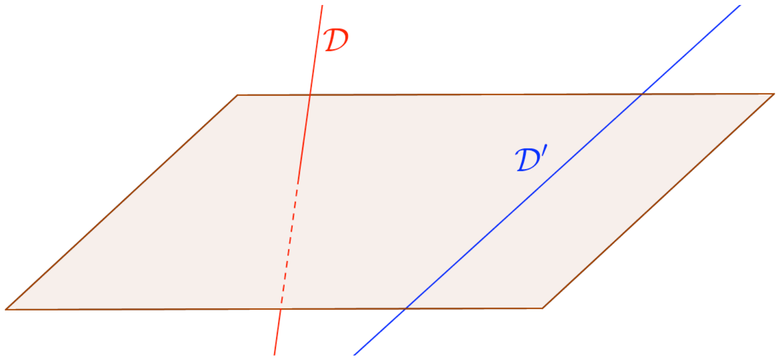
Remarque : D'après la propriété précédente deux droites sécantes sont coplanaires.

Propriété : Deux droites parallèles et non confondues ont une intersection vide. On dit alors qu'elles sont <u>strictement parallèles</u>.

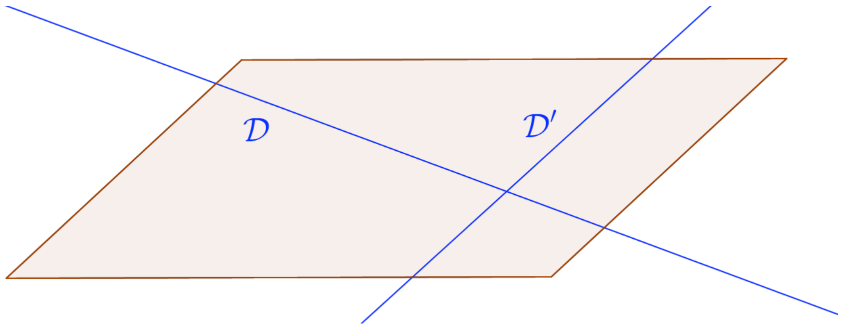
Démonstration : Supposons qu'il existe deux droites non sécantes dont l'intersection n'est pas vide. Cette intersection contient donc au moins deux points distincts A et B. D'après l'axiome 1, il n'existe qu'une seule droite qui contiennent les deux points distincts A et B. Donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.
Ainsi, si deux droites sont non sécantes et non confondues alors elles ont une intersection vide. Deux cas sont possibles :
* soit elles sont non coplanaires
* soit elles coplanaires et strictement parallèles.

Illustrations des quatre cas possibles

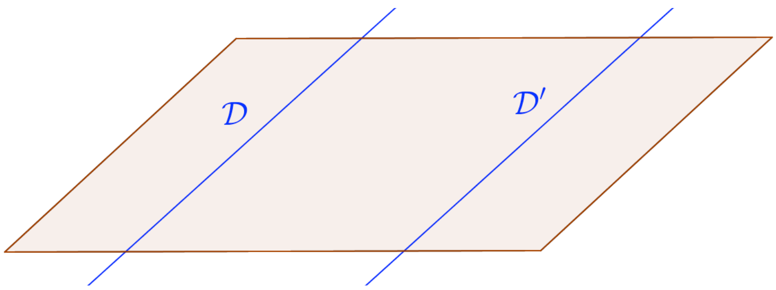
• $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires :



• $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes (donc coplanaires) :



• $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles (donc coplanaires) :



• $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues : illustration inutile...

3 Position relative de deux plans

Propriétés :
(1) Si l'intersection de deux plans contient au moins deux points distincts A et B alors elle contient la droite (AB).
(2) Si l'intersection de deux plans contient au moins trois points non alignés alors les deux plans sont confondus.

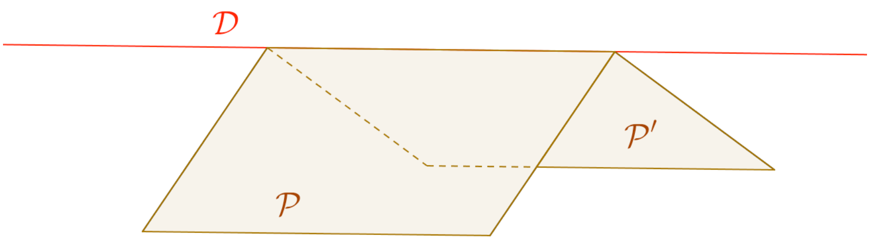
Démonstration : Il suffit d'utiliser les axiomes (1), (2) et (3).

Remarque : Il y a trois possibilités :
* l'intersection des deux plans est vide ;
* l'intersection des deux plans est une droite ;
* les deux plans sont confondus.

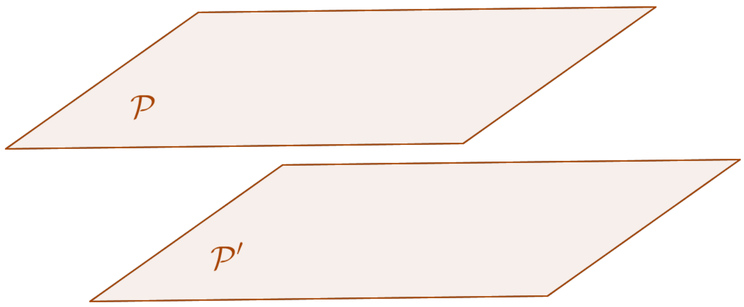
Définitions :
(1) On dit que deux plans sont <u>sécants</u> si leur intersection est une droite.
(2) On dit que deux plans sont <u>parallèles</u> s'ils sont non sécants.
(3) Deux plans parallèles et non confondus sont dits <u>strictement parallèles.</u> Dans ce cas leur intersection est vide.

<u>Illustrations des trois cas possibles</u>

• $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants



• $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles



• $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus : illustration inutile...

4 Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété : Si l'intersection d'une droite et d'un plan contient au moins deux points distincts A et B alors la droite (AB) est incluse dans le plan.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les axiomes (1) et (3).

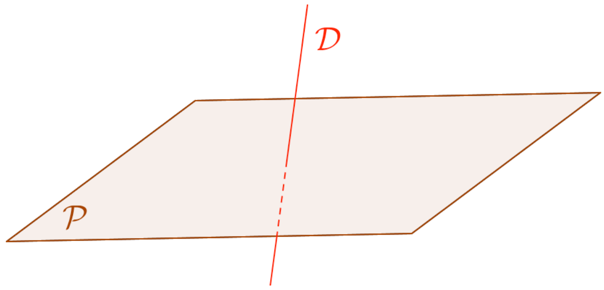
Remarque : Il y a donc trois possibilités :
* l'intersection de la droite et du plan est vide ;
* l'intersection de la droite et du plan est réduite à un point ;
* la droite est incluse dans le plan

Définitions :
(1) On dit qu'un plan et une droite sont <u>sécants</u> si leur intersection est réduite à un point.
(2) On dit qu'un plan et une droite sont <u>parallèles</u> s'ils ne sont pas sécants.

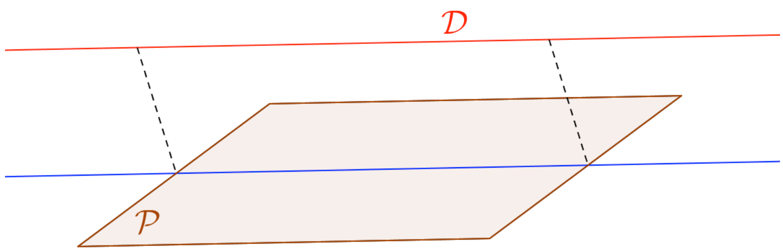
Propriété et définition : Soient une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$ alors leur intersection est vide. On dit alors que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.

Illustrations des trois cas possibles

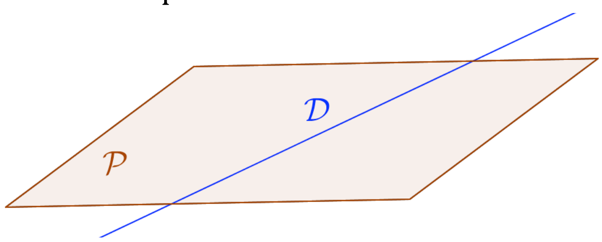
• la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants



• la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles



• la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$



I.5 Quelques propriétés du parallélisme

Propriété 1 :
(1) Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.
(2) Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

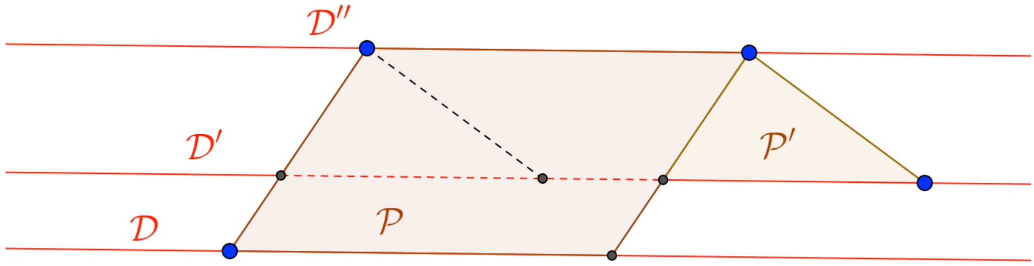
Propriété 2 : Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Propriété 3 : Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Théorème (du toit) : Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants.

Si une droite $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{P}$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ du plan $\mathcal{P}'$ alors la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

<u>Illustration du théorème du toit</u>



Dans cette figure,
* les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et leur intersection est la droite $\mathcal{D}''$;
* la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
* la droite $\mathcal{D}'$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}'$;
* les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

D'après le théorème du toit, la droite $\mathcal{D}''$ est alors parallèle aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.