Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5
Sujet A
Lundi 27 mars 2023

1. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x) - 4x^4 \text{ et } v(x) = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$u'(x) = -4 \times 4x^3 = -16x^3$$

$$v'(x) = 5 \times (-3)x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$$

On a $f = u + v$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = -16x^3 - \frac{15}{x^4}$$

$$= \frac{-16x^3 \times x^4 - 15}{x^4} = \frac{-16x^7 - 15}{x^4}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-16x^7 - 15}{x^4}}$$

2. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = -5x^2 + 3x + 9$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(x) = -5 \times 2x + 3 = -10x + 3$$

On a $g = u \times v$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(-5x^2 + 3x + 9) + \sqrt{x}(-10x + 3)$$

$$= \frac{-5x^2 + 3x + 9 + 2\sqrt{x}^2(-10x + 3)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-5x^2 + 3x + 9 - 20x^2 + 6x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-25x^2 + 9x + 9}{2\sqrt{x}}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{-25x^2 + 9x + 9}{2\sqrt{x}}}$$

De plus, **la fonction g n'est pas dérivable en 0** car la fonction u n'est pas dérivable en 0.

3. Considérons la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par

$$v(x) = x^2 + 3$$

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$v'(x) = 2x$$

On a $h = \frac{1}{v}$ et la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}}$$

4. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{5}\right\}$ par :

$$u(x) = -3x + 8$$
$$v(x) = 5x - 9$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{5}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{5}\right\}$ on a :

$$u'(x) = -3$$
$$v'(x) = 5$$

On a $k = \frac{u}{v}$ donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{5}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{9}{5}\right\}$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x)v((x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-3(5x-9) - 5(-3x+8)}{(5x-9)^2} \\ &= \frac{-15x + 27 + 15x - 40}{(5x-9)^2} \\ &= \frac{-13}{(5x-9)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{k'(x) = \frac{-13}{(5x-9)^2}}$$

5. Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x^8$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = 8x^7$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) = u(-6x+7)$. Donc la fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} m'(x) &= -6 \times m'(-6x+7) \\ &= -6 \times 8(-6x+7)^7 \\ &= -48(-6x+7)^7 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\boldsymbol{m'(x) = -48(-6x+7)^7}$$