Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5
Sujet A
Lundi 27 mars 2023

1. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x) = -3x^4 \text{ et } v(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$u'(x) = -3 \times 4x^3 = -12x^3$$

$$v'(x) = 2 \times (-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

On a $f = u + v$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = -12x^3 - \frac{6}{x^4}$$

$$= \frac{-12x^3 \times x^4 - 6}{x^4} = \frac{-12x^7 - 6}{x^4}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-12x^7 - 6}{x^4}}$$

2. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = -3x^2 + 7x + 2$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(x) = -3 \times 2x + 7 = -6x + 7$$

On a $g = u \times v$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(-3x^2 + 7x + 2) + \sqrt{x}(-6x + 7)$$

$$= \frac{-3x^2 + 7x + 2 + 2\sqrt{x}^2(-6x + 7)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-3x^2 + 7x + 2 - 12x^2 + 14x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-15x^2 + 21x + 2}{2\sqrt{x}}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{-15x^2 + 21x + 2}{2\sqrt{x}}}$$

De plus, **la fonction g n'est pas dérivable en 0** car la fonction u n'est pas dérivable en 0.

3. Considérons la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par

$$v(x) = x^2 + 4$$

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$v'(x) = 2x$$

On a $h=\frac{1}{v}$ et la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}}$$

4. Considérons les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{6}\right\}$ par :

$$u(x) = -5x+9$$
$$v(x) = 6x-7$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{6}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{6}\right\}$ on a :

$$u'(x) = -5$$
$$v'(x) = 6$$

On a $k=\frac{u}{v}$ donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{6}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{6}\right\}$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x)v((x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-5(6x-7)-6(-5x+9)}{(6x-7)^2} \\ &= \frac{-30x+35+30x-54}{(6x-7)^2} \\ &= \frac{-19}{(6x-7)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\boldsymbol{k'(x) = -\frac{19}{(6x-7)^2}}$$

5. Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x^9$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = 9x^8$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) = u(-7x+3)$. Donc la fonction m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} m'(x) &= -7 \times m'(-7x+3) \\ &= -7 \times 9(-7x+3)^8 \\ &= -63(-7x+3)^8 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\boldsymbol{m'(x) = -63(-7x+3)^8}$$