Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de l'interrogation de mathématiques n° 4
Sujet B
Mardi 24 janvier 2023

Exercice 1

1. a. On a

$$f(-3) = -2 \text{ et } f(-1) = 2$$

b. On a
* $f'(-3) = 0$ puisque la droite T_A est horizontale.
* $f'(-1) = \frac{5}{2}$

2. On en déduit :
* L'équation réduite de T_A :

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \times (x+3) - 2$$
$$\Leftrightarrow y = -2$$

L'équation réduite de la tangente T_A est donc $y = -2$.
* L'équation réduite de T_B :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}(x+1) + 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} + 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$$

L'équation réduite de la tangente T_B est donc $y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$.

Exercice 2

a) La fonction dérivée de la fonction r est la fonction r' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$r'(x) = -\frac{7}{3} \times 3x^2 + 5 \times 2x + 0 = \mathbf{-7x^2 + 10x}$$

b) La fonction dérivée de la fonction s est la fonction s' définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$s'(x) = 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{x^2}}$$

c) La fonction dérivée de la fonction t est la fonction t' définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$t'(x) = -3 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2\sqrt{x}}}$$

La fonction t n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3

1. On a

a) $u_0 = \frac{-2\times0+7}{0^2+1} = \mathbf{7}$ **b)** $u_3 = \frac{-2\times3+7}{3^2+1} = \mathbf{\frac{1}{10}}$ **c)** $u_8 = \frac{-2\times8+7}{8^2+1} = -\mathbf{\frac{9}{65}}$

2. On a :

a)

$$u_{n+1} = \frac{-2(n+1)+7}{(n+1)^2+1} = \frac{-2n+5}{n^2+2n+1+1} = \frac{\mathbf{-2n+5}}{\mathbf{n^2+2n+2}}$$

b)

$$u_{2n} = \frac{-2 \times 2n + 7}{(2n)^2+1} = \frac{\mathbf{-4n+7}}{\mathbf{4n^2+1}}$$

Exercice 4

1. On a :

* $v_1 = 3 - \frac{5}{2} v_0 = 3 - \frac{5}{2} \times 8 = 3 - 20 = \mathbf{-17}$
* $v_2 = 3 - \frac{5}{2} v_1 = 3 - \frac{5}{2} \times (-17) = 3 + \frac{85}{2} = \mathbf{\frac{91}{2}}$
* $v_3 = 3 - \frac{5}{2} v_2 = 3 - \frac{5}{2} \times \frac{91}{2} = 3 - \frac{455}{4} = -\frac{443}{4}$

2. On a :

$$v_1 - v_0 = -17 - 8 = -25$$
$$v_2 - v_1 = \frac{91}{2} - (-17) = \frac{125}{2}$$

$v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$w_{n+1} = -\frac{2}{7}(n+1) + 6 = -\frac{2}{7}n - \frac{2}{7} + 6 = -\frac{2}{7}n + \frac{40}{7}$$

Donc

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{2}{7}n + \frac{40}{7} - \left(-\frac{2}{7}n + 6\right) = -\frac{2}{7}n + \frac{40}{7} + \frac{2}{7}n - 6 = -\frac{2}{7}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{2}{7}$$

Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{2}{7}$.

Exercice 6

1. a. Puisque la suite (a_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{4}$, on a :

$$a_{17} = a_0 + 17 \times r = 5 + 17 \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{71}{4}}$$

b. D'une façon générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_n = a_0 + n \times r$$

Soit

$$\boldsymbol{a_n = 5 + \frac{3}{4}n}$$

c. On peut calculer la somme :

$$S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{17} = 18 \times \frac{a_0 + a_{17}}{2}$$
$$= 18 \times \frac{5 + \frac{71}{4}}{2} = 18 \times \frac{91}{8} = \frac{819}{4}$$

Finalement

$$\boldsymbol{S = \frac{819}{4}}$$

2. a. La suite (b_n) est arithmétique. Notons r sa raison, on a donc :

$$b_8 = b_5 + (8-5)r$$
$$\Leftrightarrow -2 = 10 + 3r$$
$$\Leftrightarrow -2 - 10 = 3r$$
$$\Leftrightarrow r = -\frac{12}{3}$$
$$\Leftrightarrow r = -4$$

La raison de la suite (b_n) est donc égale à -4.

b. On a alors :

$$b_0 = b_5 + (0-5)r$$
$$\Leftrightarrow b_0 = 10 - 5 \times (-4) = \mathbf{30}$$

c. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = b_0 + nr$$

D'où

$$\boldsymbol{b_n = 30 - 4n}$$

3.

a) $N_1 = \frac{61 \times 62}{2} = \mathbf{1891}$

b)

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + 107 = \frac{107 \times 108}{2} = 5778$$
$$S_2 = 1 + 2 + \cdots + 27 = \frac{27 \times 28}{2} = 378$$

Donc

$$N_2 = S_1 - S_2 = 5778 - 378 = \mathbf{5400}$$

Question bonus :

On a les équivalences suivantes :

$$b_n \leq -100$$
$$\Leftrightarrow 30 - 4n \leq -100$$
$$\Leftrightarrow -4n \leq -130$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-130}{-4}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 32{,}5$$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{b_n})$ est inférieure à -100 à partir du rang 33.