Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de l'interrogation de mathématiques n° 4
Sujet A
Mardi 24 janvier 2023

Exercice 1

1. a. On a

$$f(1) = -2 \text{ et } f(3) = 2$$

b. On a

* $f'(1) = \frac{5}{2}$
* $f'(3) = 0$ puisque la droite T_A est horizontale.

2. On en déduit :

* L'équation réduite de T_A :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \times (x-3) + 2$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

L'équation réduite de la tangente $\boldsymbol{T_A}$ est donc $\boldsymbol{y = 2}$.

* L'équation réduite de T_B :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}(x-1) - 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2} - 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}$$

L'équation réduite de la tangente $\boldsymbol{T_B}$ est donc $\boldsymbol{y = \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}}$.

Exercice 2

a) La fonction dérivée de la fonction r est la fonction r' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$r'(x) = -\frac{5}{3} \times 3x^2 + 7 \times 2x + 0 = \boldsymbol{-5x^2 + 14x}$$

b) La fonction dérivée de la fonction s est la fonction s' définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$s'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\boldsymbol{\frac{5}{x^2}}$$

c) La fonction dérivée de la fonction t est la fonction t' définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$t'(x) = -3 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\boldsymbol{\frac{3}{2\sqrt{x}}}$$

La fonction $\boldsymbol{t}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3

1. On a

a) $u_0 = \frac{-3\times 0+5}{0^2+1} = \boldsymbol{5}$ **b)** $u_3 = \frac{-3\times 3+5}{3^2+1} = \frac{-4}{10} = -\boldsymbol{\frac{2}{5}}$ **c)** $u_7 = \frac{-3\times 7+5}{7^2+1} = \frac{-16}{50} = -\boldsymbol{\frac{8}{25}}$

2. On a :

a)

$$u_{n+1} = \frac{-3(n+1)+5}{(n+1)^2+1} = \frac{-3n+2}{n^2+2n+1+1} = \boldsymbol{\frac{-3n+2}{n^2+2n+2}}$$

b)

$$u_{2n} = \frac{-3\times 2n+5}{(2n)^2+1} = \boldsymbol{\frac{-6n+5}{4n^2+1}}$$

Exercice 4

1. On a :

* $v_1 = 5 - \frac{3}{2}v_0 = 5 - \frac{3}{2} \times 8 = 5 - 12 = \mathbf{-7}$
* $v_2 = 5 - \frac{3}{2}v_1 = 5 - \frac{3}{2} \times (-7) = 5 + \frac{21}{2} = \mathbf{\frac{31}{2}}$
* $v_3 = 5 - \frac{3}{2}v_2 = 5 - \frac{3}{2} \times \frac{31}{2} = 5 - \frac{93}{4} = \mathbf{-\frac{73}{4}}$

2. On a :

$$v_1 - v_0 = -7 - 8 = -15$$
$$v_2 - v_1 = \frac{31}{2} - (-7) = \frac{45}{2}$$

$v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$w_{n+1} = -\frac{5}{6}(n+1) + 4 = -\frac{5}{6}n - \frac{5}{6} + 4 = -\frac{5}{6}n + \frac{19}{6}$$

Donc

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{5}{6}n + \frac{19}{6} - \left(-\frac{5}{6}n + 4\right) = -\frac{5}{6}n + \frac{19}{4} + \frac{5}{6}n - 4 = -\frac{5}{6}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{5}{6}$$

Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{5}{6}$.

Exercice 6

1. a. Puisque la suite (a_n) est arithmétique de raison $\frac{5}{3}$, on a :

$$a_{18} = a_0 + 18 \times r = 2 + 18 \times \frac{5}{3} = \mathbf{32}$$

b. D'une façon générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_n = a_0 + n \times r$$

Soit

$$\boldsymbol{a_n = 2 + \frac{5}{3}n}$$

c. On peut calculer la somme :

$$S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{18} = 19 \times \frac{a_0 + a_{18}}{2}$$
$$= 19 \times \frac{2 + 32}{2} = 19 \times 17$$

Finalement

$$\boldsymbol{S = 323}$$

2. a. La suite (b_n) est arithmétique. Notons r sa raison, on a donc :

$$b_8 = b_5 + (8-5)r$$
$$\Leftrightarrow -4 = 11 + 3r$$
$$\Leftrightarrow -4 - 11 = 3r$$
$$\Leftrightarrow r = -\frac{15}{3}$$
$$\Leftrightarrow r = -5$$

La raison de la suite (b_n) est donc égale à -5.

b. On a alors :

$$b_0 = b_5 + (0-5)r$$

$$\Leftrightarrow b_0 = 11 - 5 \times (-5) = \mathbf{36}$$

c. On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = b_0 + nr$$

D'où

$$\boldsymbol{b_n = 36 - 5n}$$

3.

a) $N_1 = \frac{53 \times 54}{2} = \mathbf{1431}$

b)

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + 103 = \frac{103 \times 104}{2} = 5356$$

$$S_2 = 1 + 2 + \cdots + 34 = \frac{34 \times 35}{2} = 595$$

Donc

$$N_2 = S_1 - S_2 = 5356 - 595 = \mathbf{4761}$$

Question bonus :

On a les équivalences suivantes :

$$b_n \leq -100$$
$$\Leftrightarrow 36 - 5n \leq -100$$
$$\Leftrightarrow -5n \leq -136$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-136}{-5}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 27{,}2$$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{b_n})$ est inférieure à -100 à partir du rang 28.