DEVOIR COMMUN

1ère spécialité mathématiques

15 Avril 2023

Lycée Jean-Jacques Rousseau, Montmorency

Durée : 3 heures

Sortie autorisée à partir de 2h de composition.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5
accompagnées d'une feuille d'annexe (numérotée 6).
Seule la feuille d'annexe est à rendre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée,
mais aucun prêt de calculatrice n'est permis.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Vous êtes invité à faire figurer sur votre copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

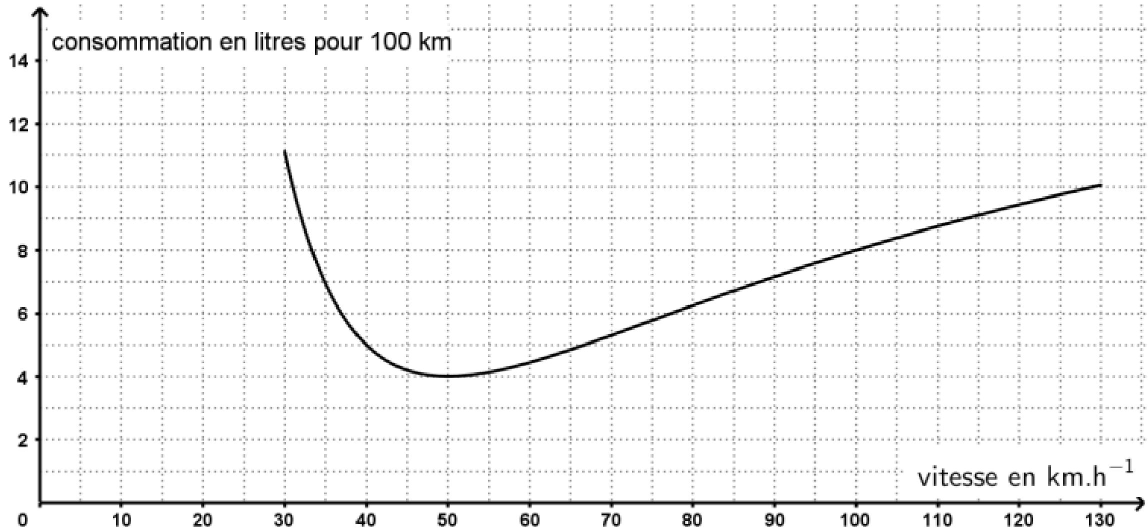
Barème _**indicatif**_ (sur 30 points) :
Ex. 1 : 7 points ; Ex. 2 : 4 points ; Ex. 3 : 10 points ; Ex. 4 : 9 points

Exercice 1 : Étude d'une fonction

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Partie A - Lecture graphique.

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



1. Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?

b. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?

c. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il plus de 5 litres pour 100 km ?

d. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ? Quelle est alors cette consommation ?

Partie B - Modélisation.

Notons x la vitesse du véhicule en km.h^{-1} avec $30 \leq x \leq 130$.
La consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[30\ ;\ 130]$, d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}$$

2. a. Montrer que résoudre l'inéquation $f(x) > 5$ équivaut à résoudre

$$3x^2 - 320x + 8000 > 0$$

b. Résoudre alors cette inéquation et comparer les solutions avec les résultats obtenus à la question 1.c.

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout $x \in [30\ ;130]$:

$$f'(x) = \frac{800(2x - 100)}{x^3}$$

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

c. Démontrer la conjecture de la question 1.d.

Exercice 2

Pour chacune des cinq situations indépendantes ci-dessous, choisissez la seule proposition exacte parmi les quatre proposées. Aucune justification n'est attendue pour cet exercice. Une réponse inexacte n'enlève pas de point.
Vos réponses devront être écrites **sur votre copie**. Aucune réponse sur la feuille d'énoncé ne sera prise en compte.

1. On considère la fonction g définie sur $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right]$ par :

$$g(x) = 3\sqrt{5-2x}$$

La fonction g est dérivable sur $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$, on a :

a. $g'(x) = \frac{3}{\sqrt{5-2x}}$ **b.** $g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{5-2x}}$

c. $g'(x) = \frac{1}{12\sqrt{5-2x}}$ **d.** $g'(x) = -\frac{1}{12\sqrt{5-2x}}$

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \frac{5}{x^4}$$

La courbe représentative de h admet au point d'abscisse 2 une tangente d'équation réduite :

a. $y = \frac{5}{16}x - \frac{5}{4}$ **b.** $y = \frac{5}{16}x$

c. $y = -\frac{5}{8}x + \frac{25}{16}$ **d.** $y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{16}$

3. On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

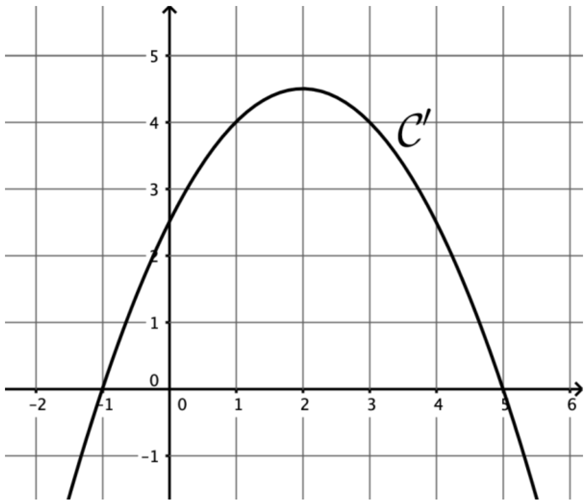
$$k(x) = 11 - (x+3)^2$$

La fonction k atteint

a. sa valeur minimum en -3 **b.** sa valeur minimum en 3

c. sa valeur maximum en -3 **d.** sa valeur maximum en 3

4. On considère la fonction r définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de sa fonction dérivée r'.



On peut en déduire que la fonction r

a. est une fonction affine.

b. admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

c. est strictement négative sur l'intervalle $[2\,;5]$.

d. est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

5. On considère la fonction p polynôme du second degré dont le discriminant est égal à 0. On peut en déduire que la courbe représentative de la fonction p:

a. n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses.

b. possède un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses.

c. possède exactement deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

d. possède exactement trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

<u>Exercice 3</u> : Suites numériques

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

Dans la station spatiale internationale (ISS), on fait une expérience de culture en apesanteur. Chaque semaine, on plante 100 graines de plus, mais 5 % de la culture précédente périt. On modélise la situation par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le nombre de graines vivantes après n semaines.
On arrondira tous les résultats numériques à l'unité la plus proche.

1. a. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100$$

b. Calculez u_1, u_2 et u_3.

2. a. Prouvez que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

b. Prouvez que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 2000 - u_n$$

3. a. Calculez v_0, v_1 et v_2.

b. Prouvez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1. Vous donnerez cette raison.
Indication : on peut exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis appliquer une formule de l'énoncé.

c. Exprimez v_n en fonction de n (formule explicite de la suite (v_n)) puis donnez son sens de variation.

d. Déduisez en la forme explicite de la suite (u_n) et son sens de variation.

e. Combien il y aura-t-il de graines vivantes après 10 semaines ?

4. a. Calculez par une formule de cours

$$S_v = v_0 + v_1 + \cdots + v_{99}$$

(notation : $S_v = \sum_{i=0}^{99} v_i$)

b. On considère maintenant

$$S_u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$$

(notation : $S_u = \sum_{i=0}^{99} u_i$).
Montrez que l'on a

$$S_u = 200\,000 - S_v$$

puis calculez S_u.

Partie II

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^3 + 3{a_n}^2 + a_n + 3}{(a_n + 1)^2}$$

1. Calculez a_1 et a_2.

2. Montrez par un calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{{a_n}^2 + 3}{(a_n + 1)^2}$$

3. Déduisez en le sens de variation de la suite (a_n).

<u>Exercice 4</u> : Géométrie

Dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\,)$, on donne les points

$A(5\ ;\ 2)$, $B(-4\ ;\ 0)$, $C(4\ ;\ 4)$, $D(-2\ ;\ 1)$ et $E(-1;\ -1)$.

1. Tracer les points A, B, C, D et E sur la figure jointe en annexe.

2. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EA}$.

b. En déduire que les droites (BC) et (EA) sont parallèles.

3. Les points B, C et D sont-ils alignés ?

4. a. Calculer l'équation réduite de la droite (BC).

b. Déterminer le réel y_0 pour que le point $M(24\ ;y_0)$ appartienne à la droite (BC).

5. On considère le quadrilatère $DCAE$:

a. Démontrer que le quadrilatère $DCAE$ est un parallélogramme.

b. Soit F le milieu du segment $[DA]$. Calculer les coordonnées du point F. Placer ce point sur la figure.

c. Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$.

d. Calculer $\|\overrightarrow{DC}\|$, $\|\overrightarrow{CA}\|$ et $\|\overrightarrow{DA}\|$.

e. Démontrer que le quadrilatère $DCAE$ est un rectangle.

f. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre F et de diamètre $[DA]$. Démontrer que E appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Annexe pour
le devoir commun de mathématiques
du 15 avril 20232
A rendre avec la copie

Figure pour l'exercice 4

Prénom : Nom : Classe :

Professeur de spécialité mathématiques :