**Spécialité mathématiques**
**Classe de première**
**Correction du contrôle n° 4**
**Sujet A**
Lundi 13 mars 2023

## Exercice 1

**1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = 4 - 7(n+1)^2 = 4 - 7(n^2 + 2n + 1)$$
$$= 4 - 7n^2 - 14n - 7 = -7n^2 - 14n - 3$$

D'où

$$a_{n+1} - a_n = -7n^2 - 14n - 3 - (4 - 7n^2)$$
$$= -7n^2 - 14n - 3 - 4 + 7n^2 = -14n - 7$$

Puisque $n \geq 0$, on a $-14n - 7 \leq -7 < 0$ donc

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

**Donc la suite $(a_n)$ est strictement décroissante.**

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = \frac{-4}{3(n+1)+1} = \frac{-4}{3n+3+1} = \frac{-4}{3n+4}$$

D'où

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-4}{3n+4} - \frac{-4}{3n+1} = \frac{-4(3n+1) + 4(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}$$
$$= \frac{-12n - 4 + 12n + 16}{(3n+4)(3n+1)}$$
$$= \frac{12}{(3n+4)(3n+1)}$$

Puisque $n \geq 0$, on a $3n + 4 > 0$ et $3n + 1 > 0$ donc

$$b_{n+1} - b_n > 0$$

**Donc la suite $(b_n)$ est strictement croissante.**

## Exercice 2

**1. a)** On a :

* $d_0 = 6 \times 0 - 5 = -5$
* $d_1 = 6 \times 1 - 5 = 1$
* $d_2 = 6 \times 2 - 5 = 7$

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_{n+1} = 6(n+1) - 5 = 6n + 6 - 5 = 6n + 1$$

D'où

$$d_{n+1} - d_n = 6n + 1 - (6n - 5) = 6n + 1 - 6n + 5 = 6$$

Puisque $d_{n+1} - d_n = 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(d_n)$ est **arithmétique de raison 6**.

**c)** La suite $(d_n)$ est arithmétique de raison strictement positive. Elle est donc **strictement croissante.**

**2. a)** On a :

* $e_0 = -4 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0$
* $e_1 = -4 \times 1^2 + 3 \times 1 = -4 + 3 = -1$
* $e_2 = -4 \times 2^2 + 3 \times 2 = -16 + 6 = -10$

**b)** On a donc :

* $e_1 - e_0 = -1 - 0 = -1$
* $e_2 - e_1 = -10 - (-1) = -9$

Donc $e_2 - e_1 \neq e_1 - e_0$. **La suite $(\boldsymbol{e_n})$ n'est donc pas arithmétique.**

**c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= -4(n+1)^2 + 3(n+1) = -4(n^2+2n+1) + 3n + 3 \\ &= -4n^2 - 8n - 4 + 3n + 3 \\ &= -4n^2 - 5n - 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} e_{n+1} - e_n &= -4n^2 - 5n - 1 - (-4n^2 + 3n) = -4n^2 - 5n - 1 + 4n^2 - 3n \\ &= -8n - 1 \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 0$, $-8n - 1 \leq -1 < 0$ donc

$$e_{n+1} - e_n < 0$$

**Ainsi la suite $(\boldsymbol{e_n})$ est strictement décroissante.**

**3. a)** On a :

* $f_1 = -9 + f_0 = -9 - 3 = -12$
* $f_2 = -9 + f_1 = -9 - 12 = -21$

**b)** Par définition de la suite $(f_n)$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & f_{n+1} = -9 + f_n \\ \Leftrightarrow\ & f_{n+1} - f_n = -9 \end{aligned}$$

**La suite $(\boldsymbol{f_n})$ est donc arithmétique de raison $\boldsymbol{-9}$.**

**c)** La suite $(f_n)$ est arithmétique de raison strictement négative. Elle est donc **strictement décroissante.**

**<u>Exercice 3</u>**

**1. a)** On a :

* $h_0 = -\frac{5^{0+1}}{4^0} = -\frac{5}{1} = \boldsymbol{-5}$
* $h_1 = -\frac{5^{1+1}}{4^1} = \boldsymbol{-\frac{25}{4}}$
* $h_2 = -\frac{5^{2+1}}{4^2} = \boldsymbol{-\frac{125}{16}}$

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{-\frac{5^{n+2}}{4^{n+1}}}{-\frac{5^{n+1}}{4^n}} = -\frac{5^{n+2}}{4^{n+1}} \times \left(-\frac{4^n}{5^{n+1}}\right) = \frac{5^{n+2}}{5^{n+1}} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} = \boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

**Ainsi la suite $(\boldsymbol{h_n})$ est géométrique de raison $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$.**

**c)** La suite $(h_n)$ est géométrique, de raison strictement supérieure à 1 et de terme initial $h_0$ strictement négatif. **Elle est donc strictement décroissante.**

**2. a)** On a :

* $g_1 = \frac{3g_0}{7} = \frac{3\times(-36)}{7} = \boldsymbol{-\frac{108}{7}}$
* $g_2 = \frac{3g_1}{7} = \frac{3\times(-\frac{108}{7})}{7} = \boldsymbol{-\frac{324}{49}}$

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{\frac{3g_n}{7}}{g_n} = \mathbf{\frac{3}{7}}$$

**Ainsi la suite $(g_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{7}$.**

**c)** La suite $(g_n)$ est géométrique, de raison strictement comprise entre 0 et 1 et de terme initial $g_0$ strictement négatif. **Elle est donc strictement croissante.**

<u>**Exercice 4**</u>

**Partie I**

**1.** Une augmentation de 2,8 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\mathrm{CM} = 1 + \frac{2{,}8}{100} = 1{,}028$$

Au 1er janvier 2021, la population a augmenté de 2,8 % par rapport à l'année précédente. On a donc une population

$$u_1 = CM \times u_0 = 1{,}028u_0 = 1{,}028 \times 5600 \approx 5757$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

**Ainsi la population de Mathville au 1er janvier 2021 était 5757 de habitants.**

**2.** Puisque chaque année la population augmente de 2,8 %, on applique le coefficient multiplication à $u_n$ pour obtenir $u_{n+1}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 1{,}028u_n$$

**Ainsi la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $1{,}028$.**

**3.** Puisque $(u_n)$ est géométrique de raison 1,028, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule explicite suivante :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 q^n = 5600 \times 1{,}028^n}$$

**4.** La population au 1er janvier 2027, correspond au terme $u_7$. On a donc

$$u_7 = 5600 \times 1{,}028^7 \approx 6794$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

**Il y aura donc 6794 habitants à Mathville au 1er janvier 2027.**

**Partie II**

**5.** Une diminution de 12 % correspond à un coefficient multiplicateur

$$CM = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$$

En une année la population a été diminuée de 12 % mais, le 1er mars 2019, elle a augmenté de 15 individus. On a donc

$$v_1 = 0{,}88v_0 + 15 = 0{,}88 \times 287 + 15 \approx 268$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

**La population de canards dans l'étang au 2 mars 2019 était donc de 268 individus.**

**6.** Puisque chaque année la population a été diminuée de 12 % par rapport à l'année précédente mais comporte par ailleurs 15 individus supplémentaires. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = 0{,}88v_n + 15$$

**7. a.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 125 = 0{,}88v_n + 15 - 125 = 0{,}88v_n - 110$$

Or d'après l'énoncé $w_n = v_n - 125$ donc.

D'où

$$w_{n+1} = 0{,}88(w_n + 125) - 110$$
$$= 0{,}88w_n + 110 - 110 = 0{,}88w_n$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 0{,}88w_n$. Donc **la suite $(\boldsymbol{w_n})$ est géométrique de raison $\mathbf{0,88}$.**

**b.** On a, par définition de la suite $(w_n)$

$$w_0 = v_0 - 125 = 287 - 125 = 162$$

Puisque $(w_n)$ est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{w_n = w_0 q^n = 162 \times 0,88^n}$$

**8. a.** D'après l'expression trouvée au 7. b. on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = 125 + w_n = \mathbf{125 + 162 \times 0,88^{\boldsymbol{n}}}$$

**b.** La population de canards en mars 2023 correspond au terme $v_5$. On a donc

$$v_5 = 125 + 162 \times 0{,}88^5 \approx 210$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

**Ainsi, il y avait $\mathbf{210}$ canards dans l'étang au 2 mars 2023.**