Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction du contrôle n° 4
Sujet A
Lundi 13 mars 2023

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = 6 - 5(n+1)^2 = 6 - 5(n^2 + 2n + 1)$$
$$= 6 - 5n^2 - 10n - 5 = -5n^2 - 10n + 1$$

D'où

$$a_{n+1} - a_n = -5n^2 - 10n + 1 - (6 - 5n^2)$$
$$= -5n^2 - 10n + 1 - 6 + 5n^2 = -10n - 5$$

Puisque $n \geq 0$, on a $-10n - 5 \leq -5 < 0$ donc

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

Donc la suite $(\boldsymbol{a_n})$ est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = \frac{-3}{4(n+1)+1} = \frac{-3}{4n+4+1} = \frac{-3}{4n+5}$$

D'où

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-3}{4n+5} - \frac{-3}{4n+1} = \frac{-3(4n+1) + 3(4n+5)}{(4n+5)(4n+1)}$$
$$= \frac{-12n - 3 + 12n + 15}{(4n+5)(4n+1)}$$
$$= \frac{12}{(4n+5)(4n+1)}$$

Puisque $n \geq 0$, on a $4n + 5 > 0$ et $4n + 1 > 0$ donc

$$b_{n+1} - b_n > 0$$

Donc la suite $(\boldsymbol{b_n})$ est strictement croissante.

Exercice 2

1. a) On a :

* $d_0 = 4 \times 0 - 7 = -7$
* $d_1 = 4 \times 1 - 7 = -3$
* $d_2 = 4 \times 2 - 7 = 1$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_{n+1} = 4(n+1) - 7 = 4n + 4 - 7 = 4n - 3$$

D'où

$$d_{n+1} - d_n = 4n - 3 - (4n - 7) = 4n - 3 - 4n + 7 = 4$$

Puisque $d_{n+1} - d_n = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (d_n) est **arithmétique de raison 4**.

c) La suite (d_n) est arithmétique de raison strictement positive. Elle est donc **strictement croissante.**

2. a) On a :

* $e_0 = -3 \times 0^2 + 2 \times 0 = 0$
* $e_1 = -3 \times 1^2 + 2 \times 1 = -3 + 2 = -1$
* $e_2 = -3 \times 2^2 + 2 \times 2 = -12 + 4 = -10$

b) On a donc :

* $e_1 - e_0 = -1 - 0 = -1$
* $e_2 - e_1 = -10 - (-1) = -9$

Donc $e_2 - e_1 \neq e_1 - e_0$. **La suite (e_n) n'est donc pas arithmétique.**

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= -3(n+1)^2 + 2(n+1) = -3(n^2+2n+1) + 2n + 2 \\ &= -3n^2 - 6n - 3 + 2n + 2 \\ &= -3n^2 - 4n - 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} e_{n+1} - e_n &= -3n^2 - 4n - 1 - (-3n^2 + 2n) = -3n^2 - 4n - 1 + 3n^2 - 2n \\ &= -6n - 1 \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 0$, $-6n - 1 \leq -1 < 0$ donc

$$e_{n+1} - e_n < 0$$

Ainsi la suite (e_n) est strictement décroissante.

3. a) On a :

* $f_1 = -6 + f_0 = -6 - 2 = -8$
* $f_2 = -6 + f_1 = -6 - 8 = -14$

b) Par définition de la suite (f_n) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n+1} = -6 + f_n$$
$$\Leftrightarrow f_{n+1} - f_n = -6$$

La suite (f_n) est donc arithmétique de raison -6.

c) La suite (f_n) est arithmétique de raison strictement négative. Elle est donc **strictement décroissante.**

__Exercice 3__

1. a) On a :

* $h_0 = -\frac{5^{0+1}}{2^0} = -\frac{5}{1} = \mathbf{-5}$
* $h_1 = -\frac{5^{1+1}}{2^1} = -\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{2}}$
* $h_2 = -\frac{5^{2+1}}{2^2} = -\frac{\mathbf{125}}{\mathbf{4}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{-\frac{5^{n+2}}{2^{n+1}}}{-\frac{5^{n+1}}{2^n}} = -\frac{5^{n+2}}{2^{n+1}} \times \left(-\frac{2^n}{5^{n+1}}\right) = \frac{5^{n+2}}{5^{n+1}} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

Ainsi la suite (h_n) est géométrique de raison $\frac{5}{2}$.

c) La suite (h_n) est géométrique, de raison strictement supérieure à 1 et de terme initial h_0 strictement négatif. **Elle est donc strictement décroissante.**

2. a) On a :

* $g_1 = \frac{2g_0}{3} = \frac{2\times(-36)}{3} = \mathbf{-24}$
* $g_2 = \frac{2g_1}{3} = \frac{2\times(-24)}{3} = \mathbf{-16}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{\frac{2g_n}{3}}{g_n} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Ainsi la suite (g_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c) La suite (g_n) est géométrique, de raison strictement comprise entre 0 et 1 et de terme initial g_0 strictement négatif. **Elle est donc strictement croissante.**

<u>Exercice 4</u>

Partie I

1. Une augmentation de 3,2 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\mathrm{CM} = 1 + \frac{3,2}{100} = 1,032$$

Au 1er janvier 2021, la population a augmenté de 3,2 % par rapport à l'année précédente. On a donc une population

$$u_1 = CM \times u_0 = 1,032u_0 = 1,032 \times 4300 \approx 4438$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

Ainsi la population de Mathville au 1er janvier 2021 était 4438 de habitants.

2. Puisque chaque année la population augmente de 3,2 %, on applique le coefficient multiplication à u_n pour obtenir u_{n+1}. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 1,032u_n$$

Ainsi la suite (u_n) est géométrique de raison $1,032$.

3. Puisque (u_n) est géométrique de raison $1,032$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule explicite suivante :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 q^n = 4300 \times 1,032^n}$$

4. La population au 1er janvier 2027, correspond au terme u_7. On a donc

$$u_7 = 4300 \times 1,032^7 \approx 5361$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

Il y aura donc 5361 habitants à Mathville au 1er janvier 2027.

Partie II

5. Une diminution de 12 % correspond à un coefficient multiplicateur

$$CM = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,88$$

En une année la population a été diminuée de 12 % mais, le 1er mars 2019, elle a augmenté de 15 individus. On a donc

$$v_1 = 0,88v_0 + 15 = 0,88 \times 352 + 15 \approx 325$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

La population de canards dans l'étang au 2 mars 2019 était donc de 325 individus.

6. Puisque chaque année la population a été diminuée de 12 % par rapport à l'année précédente mais comporte par ailleurs 15 individus supplémentaires. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = 0,88v_n + 15$$

7. a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 125 = 0,88v_n + 15 - 125 = 0,88v_n - 110$$

Or d'après l'énoncé $w_n = v_n - 125$ donc.

D'où

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 0,88(w_n + 125) - 110 \\ &= 0,88w_n + 110 - 110 = 0,88w_n \end{aligned}$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 0,88w_n$. Donc **la suite (w_n) est géométrique de raison $0,88$.**

b. On a par définition de la suite (w_n)

$$w_0 = v_0 - 125 = 352 - 125 = 227$$

Puisque (w_n) est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{w_n = w_0 q^n = 227 \times 0,88^n}$$

8. a. D'après l'expression trouvée au 7. b. on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 125 + w_n = \mathbf{125 + 227 \times 0,88^{\boldsymbol{n}}}$$

b. La population de canards en mars 2023 correspond au terme v_5. On a donc

$$v_5 = 125 + 227 \times 0{,}88^5 \approx 245$$

en arrondissant à l'unité la plus proche.

Ainsi, il y avait 245 canards dans l'étang au 2 mars 2023.