

Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction du contrôle n° 3
Sujet B
Lundi 9 janvier 2023

Exercice 1

Partie A

1.

a. Par lecture graphique, on obtient :

* $f(-1) = -1$

* $f(1) = 0$

* $f(2) = -1$

b. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .

Par lecture graphique, on obtient donc :

* $f'(-1) = 4$

* $f'(1) = -\frac{3}{2}$

* $f'(2) = 0$

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par la formule suivante :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

* On a donc pour la droite T_A l'équation suivante :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$\Leftrightarrow y = 4(x + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow y = 4x + 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = 4x + 3$$

Finalement l'équation de la droite T_A est $y = 4x + 3$.

* Pour la droite T_B :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Finalement l'équation de la droite T_B est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

* Pour la droite T_C :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \times (x - 2) - 1$$

$$\Leftrightarrow y = -1$$

Finalement l'équation de la droite T_C est $y = -1$.

Partie B

3. a. Notons u , v et w les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$u(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$v(x) = -\frac{3}{2}x^2$$

$$w(x) = 1$$

Les fonctions u , v et w sont dérivables comme polynômes et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = \frac{1}{2} \times 3x^2 = \frac{3}{2}x^2$$

$$v'(x) = -\frac{3}{2} \times 2x = -3x$$

$$w'(x) = 0$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = u(x) + v(x) + w(x)$ donc g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 0$$

Finalement l'expression de la fonction dérivée g' est

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$$

b. La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation :

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$$

Calculons :

$$* g(-1) = \frac{1}{2} \times (-1)^3 - \frac{3}{2} \times (-1)^2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$* g'(-1) = \frac{3}{2} \times (-1)^2 - 3 \times (-1) = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = \frac{9}{2}(x + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y = \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$.

• De même, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

Calculons :

$$* g(1) = \frac{1}{2} \times 1^3 - \frac{3}{2} \times 1^2 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$* g'(1) = \frac{3}{2} \times 1^2 - 3 \times 1 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

4. La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire si $g'(a) = 0$.

Résolvons l'équation :

$$g'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{3}{2}x - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{3}{2}x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Finalement les points de la courbe où la tangente est horizontale sont **les points d'abscisses 0 et 2**.

Exercice 2

1. a. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 3 \times \frac{1}{x}$$

La fonction inverse est dérivable sur \mathbb{R}^* donc la fonction f est dérivable. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$$

Finalement l'expression de la fonction dérivée est

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

b. La tangente au point d'abscisse 7 a une équation réduite de la forme :

$$y = f'(7)(x - 7) + f(7)$$

Calculons

$$* f(7) = \frac{3}{7}$$

$$* f'(7) = -\frac{3}{7^2} = -\frac{3}{49}$$

D'où l'équation de la tangente :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{49}(x - 7) + \frac{3}{7} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{49}x + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{49}x + \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 7 est $y = -\frac{3}{49}x + \frac{6}{7}$.

c. La tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 2$ si et seulement si ces deux droites ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire si

$$f'(a) = -\frac{3}{4}$$

Réolvons cette équation :

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{3}{4} &\Leftrightarrow -\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 = 4 &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

La tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 2$ **aux points d'abscisse -2 et 2.**

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$g(x) = 5 \times \sqrt{x}$$

La fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* donc la fonction g est aussi dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

b. La tangente au point d'abscisse 4 a une équation réduite de la forme

$$y = g'(4)(x - 4) + g(4)$$

Calculons :

$$* g(4) = 5\sqrt{4} = 10$$

$$* g'(4) = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{4}$$

D'où l'équation de la tangente :

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{4}(x - 4) + 10 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5}{4}x - 5 + 10 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5}{4}x + 5 \end{aligned}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est $y = \frac{5}{4}x + 5$.

c. La tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{5}{6}x - 1$ si et seulement si ces deux droites ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire si

$$g'(a) = \frac{5}{6}$$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{5}{6} &\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x} &= 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \end{aligned}$$

La tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{5}{6}x - 1$ **au point d'abscisse 9**.

Exercice 3

Les propositions correctes sont les suivantes :

1. a.

Si la fonction f est dérivable en a , alors le nombre dérivé $f'(a)$ est défini par $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h)$ où τ_a est la fonction définie par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2. a.

Si la fonction f est dérivable en a , alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est donné par la formule suivante :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3. b.

La fonction valeur absolue est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .

4. b

Le nombre dérivé de la fonction valeur absolue en -5 est -1 .