Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction du contrôle n° 3
Sujet A
Lundi 9 janvier 2023

Exercice 1

Partie A

1.
a. Par lecture graphique, on obtient :
* $f(-2) = -1$
* $f(-1) = 0$
* $f(1) = -1$
b. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
Par lecture graphique, on obtient donc :
* $f'(-2) = 0$
* $f'(-1) = \frac{3}{2}$
* $f'^{(2)} = -4$
2. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par la formule suivante :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
* On a donc pour la droite T_A l'équation suivante :
$$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \times (x+2) - 1$$
$$\Leftrightarrow y = -1$$
Finalement l'équation de la droite T_A est $\boldsymbol{y = -1}$.
* Pour la droite T_B :
$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}(x+1) + 0$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$
Finalement l'équation de la droite T_B est $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}$.
* Pour la droite T_C :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$\Leftrightarrow y = -4(x-1) - 1$$
$$\Leftrightarrow y = -4x + 4 - 1$$
$$\Leftrightarrow y = -4x + 3$$
Finalement l'équation de la droite T_C est $\boldsymbol{y = -4x + 3}$.

Partie B

3. a. Notons u, v et w les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$u(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$v(x) = -\frac{3}{2}x^2$$
$$w(x) = 1$$
Les fonctions u, v et w sont dérivables comme polynômes et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$u'(x) = -\frac{1}{2} \times 3x^2 = -\frac{3}{2}x^2$$

$$v'(x) = -\frac{3}{2} \times 2x = -3x$$
$$w'(x) = 0$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = u(x) + v(x) + w(x)$ donc g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 0$$

Finalement l'expression de la fonction dérivée g' est

$$\boldsymbol{g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x}$$

b. La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation :

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$$

Calculons :

* $g(-1) = -\frac{1}{2} \times (-1)^3 - \frac{3}{2} \times (-1)^2 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$
* $g'(-1) = -\frac{3}{2} \times (-1)^2 - 3 \times (-1) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = \frac{3}{2}(x + 1) + 0$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}$.

• De même, **l**a tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

Calculons :

* $g(1) = -\frac{1}{2} \times 1^3 - \frac{3}{2} \times 1^2 + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -2 + 1 = -1$
* $g'(1) = -\frac{3}{2} \times 1^2 - 3 \times 1 = -\frac{3}{2} - 3 = -\frac{9}{2}$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = -\frac{9}{2}(x - 1) - 1$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}x + \frac{9}{2} - 1$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $\boldsymbol{y = -\frac{9}{2}x + \frac{7}{2}}$.

4. La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire si $g'(a) = 0$.

Résolvons l'équation :

$$g'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 - 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow -x\left(\frac{3}{2}x + 3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -x = 0 \text{ ou } \frac{3}{2}x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3 \times \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Finalement les points de la courbe où la tangente est horizontale sont **les points d'abscisses 0 et $\boldsymbol{-2}$**.

Exercice 2

1. a. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$$

La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction f est dérivable. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

Finalement l'expression de la fonction dérivée est

$$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{2}{x^2}}$$

b. La tangente au point d'abscisse 5 a une équation réduite de la forme :

$$y = f'(5)(x-5) + f(5)$$

Calculons

* $f(5) = \frac{2}{5}$

* $f'(5) = -\frac{2}{5^2} = -\frac{2}{25}$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = -\frac{2}{25}(x-5) + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{25}x + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{25}x + \frac{4}{5}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 7 est $\boldsymbol{y = -\frac{2}{25}x + \frac{4}{5}}$**.**

c. La tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{9}x + 1$ si et seulement si ces deux droites ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire si

$$f'(a) = -\frac{2}{9}$$

Résolvons cette équation :

$$f'(x) = -\frac{2}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

La tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 2$ **aux points d'abscisse $\boldsymbol{-3}$ et $\boldsymbol{3}$**.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$g(x) = 7 \times \sqrt{x}$$

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction g est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

b. La tangente au point d'abscisse 9 a une équation réduite de la forme

$$y = g'(9)(x-9) + g(9)$$

Calculons :

* $g(9) = 7\sqrt{9} = 21$

* $g'(9) = \frac{7}{2\sqrt{9}} = \frac{7}{6}$

D'où l'équation de la tangente :

$$y = \frac{7}{6}(x-9) + 21$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{6}x - \frac{21}{2} + 21$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{6}x + \frac{21}{2}$$

Finalement l'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est $\boldsymbol{y = \frac{7}{6}x + \frac{21}{2}}$**.**

c. La tangente à la courbe au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{7}{4}x - 2$ si et seulement si ces deux droites ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire si

$$g'(a) = \frac{7}{4}$$

Résolvons cette équation :

$$g'(x) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

La tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{7}{4}x - 2$ **au point d'abscisse $\boldsymbol{4}$**.

<u>Exercice 3</u>

Les propositions correctes sont les suivantes :

1. c.

Si la fonction f est dérivable en a, alors le nombre dérivé $f'(a)$ est défini par $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h)$ où τ_a est la fonction définie par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2. c.

Si la fonction f est dérivable en a, alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est donné par la formule suivante :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

3. d.

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4. d

Le nombre dérivé de la fonction valeur absolue en -9 est -1.