Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction du contrôle n° 2
Sujet B
Mardi 15 novembre 2022

Exercice 1

1. a. On a : $A \in D_1$ donc

$$-5x_A + 7y_A + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -5 \times (-4) + 7y_A + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 20 + 7y_A = 0$$
$$\Leftrightarrow 7y_A = -20$$
$$\Leftrightarrow y_A = -\frac{20}{7}$$

L'ordonnée du point A est donc $-\frac{20}{7}$.

b. Puisque le point B appartient à l'axe des abscisses, on a $y_B = 0$. D'autre part $B \in D_1$ donc

$$-5x_B + 7y_B + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -5x_B + 7 \times 0 + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -5x_B + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -5x_B = -8$$
$$\Leftrightarrow x_B = \frac{-8}{-5}$$
$$\Leftrightarrow x_B = \frac{8}{5}$$

Les coordonnées du point B sont donc $\left(\frac{8}{5}\ ;0\right)$.

2. a. Puisque une équation cartésienne de la droite D_1 est $-5x + 7y + 8 = 0$, un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{u_1}(-7\ ;\ -5)$.

b. Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite D_1 si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$. Ceci est équivalent à :

$$\det(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}x_{\vec{v}} = 0$$
$$\Leftrightarrow -7 \times d - (-5) \times (-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow -7d - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow -7d = 15$$
$$\Leftrightarrow d = -\frac{15}{7}$$

Ainsi le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite D_1 si et seulement si $\boldsymbol{d = -\frac{15}{7}}$.

3. On a les équivalences suivantes :

$$-5x + 7y + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7y = 5x - 8$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5x-8}{7}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5x}{7} - \frac{8}{7}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}$$

L'équation réduite de la droite D_1 est donc $y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}$.
Son coefficient directeur est $\frac{5}{7}$.

4. a. On a :

$$-5x_C + 7y_C + 8 = -5 \times (-2) + 7 \times (-3) + 8 = 10 - 21 + 8 = -3$$

Donc $-5x_C + 7y_C + 8 \neq 0$. Le point C ne vérifie pas l'équation cartésienne de la droite D_1 donc il n'appartient pas à D_1.

b. SI la droite D_2 est parallèle à la droite D_1, le vecteur est aussi un vecteur directeur de la droite D_2. Cette droite possède donc une équation cartésienne de la forme

$$-5x + 7y + c = 0$$

Puisque le point C appartient à D_2, on a alors

$$-5x_C + 7y_C + c = 0$$
$$\Leftrightarrow -5 \times (-2) + 7 \times (-3) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow 10 - 21 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow -11 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 11$$

Une équation cartésienne de la droite D_2 est donc $-5x + 7y + 11 = 0$.

Exercice 2

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KP}$.

On a

* $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} -2 - 6 \\ \frac{3}{2} - (-8) \end{pmatrix}$ d'où

$$\boldsymbol{\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} -8 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}}$$

* $\overrightarrow{KP}\begin{pmatrix} x_P - x_K \\ y_P - y_K \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 0 - 6 \\ 5 - (-8) \end{pmatrix}$ d'où

$$\boldsymbol{\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix}}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$$\det(\overrightarrow{KL}\,;\ \overrightarrow{KP}) = x_{\overrightarrow{KL}}y_{\overrightarrow{KP}} - y_{\overrightarrow{KL}}x_{\overrightarrow{KP}} = -8 \times 13 - \frac{19}{2} \times (-6) = -104 + 57 = -47$$

$\det(\overrightarrow{KL}\,;\ \overrightarrow{KP}) \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KP}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points K, L et P ne sont pas alignés.

2. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KM}$ sont alors $(x - 6\,; y + 8)$

Ce point M est un point de la droite D si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

Les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{KM}\,;\ \vec{w}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{KM}}y_{\vec{w}} - y_{\overrightarrow{KM}}x_{\vec{w}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 6) \times 7 - (y + 8) \times (-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x - 42 + y + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x + y - 34 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite D est donc $7x + y - 34 = 0$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{LP}$ est un vecteur directeur de la droite (LP).

Déterminons ses coordonnées :

* $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix} x_P - x_L \\ y_P - y_L \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 5 - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LM}$ sont alors $\left(x+2\,;y-\frac{3}{2}\right)$

Ce point M est un point de la droite D si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

$$\text{Les vecteurs } \overrightarrow{LM} \text{ et } \overrightarrow{LP} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{LM}\,;\,\overrightarrow{LP}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{LM}}y_{\overrightarrow{LP}}-y_{\overrightarrow{LM}}x_{\overrightarrow{LP}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\times\frac{7}{2}-\left(y-\frac{3}{2}\right)\times 2=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}x+7-2y+3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}x-2y+10=0$$

Une équation cartésienne de la droite (LP) est donc $\frac{7}{2}x-2y+10=0$.

4. Puisque la droite D' est parallèle à la droite (LP), elle possède une équation cartésienne de la forme $\frac{7}{2}x-2y+c=0$

De plus, on a $K\in D'$ donc $\frac{7}{2}x_K-2y_K+c=0$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}\times 6-2\times(-8)+c=0$$
$$\Leftrightarrow 21+16+c=0$$
$$\Leftrightarrow 37+c=0$$
$$\Leftrightarrow c=-37$$

Finalement une équation cartésienne de D' est $\frac{7}{2}x-2y-37=0$

<u>Exercice 3</u>

1. a. Les points R et S ont des abscisses différentes donc la droite (RS) n'est pas verticale.

L'équation réduite de la droite (RS) est donc de la forme

$$y=mx+p$$

* Calculons le coefficient directeur m :

$$m=\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{-2-6}{4-(-8)}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$$

b. L'équation réduite est donc de la forme

$$y=-\frac{2}{3}x+p$$

* Calculons l'ordonnée à l'origine p :

Puisque le point S appartient à la droite (RS), on a

$$y_S=-\frac{2}{3}x_S+p$$
$$\Leftrightarrow -2=-\frac{2}{3}\times 4+p$$
$$\Leftrightarrow -2=-\frac{8}{3}+p$$
$$\Leftrightarrow p=-2+\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow p=\frac{2}{3}$$

Finalement l'équation réduite de (RS) est $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

c. Puisque le point U appartient à l'axe des abscisses, on a $y_U=0$.

Puisque U appartient à la droite (RS) on a :

$$y_U = -\frac{2}{3}x_U + \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{3}x_U + \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x_U + \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x_U = 1$$

Le point U a pour coordonnées $(\mathbf{1}\,;\mathbf{0})$.

2. L'équation réduite d'une droite verticale est de la forme $x = k$. Puisque le point T appartient à cette droite on a

$$x_T = k \Leftrightarrow 7 = k$$

Donc l'équation réduite de la droite verticale qui passe par le point $\boldsymbol{T}$ est $\boldsymbol{x = 7}$.

3. Appelons Δ la droite parallèle à (RT) qui passe par le point S. La droite (RT) n'est pas verticale car les points R et T n'ont pas la même abscisse. Puisque les droites Δ et (RT) sont parallèles, elles ont le même coefficient directeur m. Calculons le :

$$m = \frac{y_T - y_R}{x_T - x_R} = \frac{\frac{3}{5} - 6}{7 - (-8)} = \frac{-\frac{37}{5}}{15} = -\frac{37}{5} \times \frac{1}{15} = -\frac{37}{25}$$

L' équation réduite de la droite Δ est de la forme

$$y = -\frac{37}{25}x + p$$

Puisque S appartient à Δ, on a :

$$-\frac{37}{25}x_S + p = y_S$$
$$\Leftrightarrow -\frac{37}{25} \times 4 + p = -2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{148}{25} + p = -2$$
$$\Leftrightarrow p = -2 + \frac{148}{25}$$
$$\Leftrightarrow p = -\frac{98}{25}$$

Finalement l'équation réduite de Δ est $\boldsymbol{y = -\frac{37}{25}x - \frac{98}{25}}$.

Exercice 4

1. a. On peut lire graphiquement les coordonnées des points A et B :

$$A(-3\,;-2) \text{ et } B(4\,;3)$$

La droite Δ n'est pas verticale puisque les points A et B n'ont pas la même abscisse. Son équation réduite est le forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de Δ est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

L'équation réduite de Δ est donc de la forme

$$y = \frac{5}{7}x + p$$

Puisque le point B appartient à cette droite on a :

$$\frac{5}{7}x_B + p = y_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{7}\times 4+p=3$$
$$\Leftrightarrow \frac{20}{7}+p=3$$
$$\Leftrightarrow p=2-\frac{20}{7} \Leftrightarrow p=-\frac{6}{7}$$

Finalement l'équation réduite de Δ est $\boldsymbol{y=\frac{5}{7}x-\frac{6}{7}}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite Δ . Or on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-3)\\3-(-2)\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}.$$

2. Puisque le point V appartient à l'axe des ordonnées, on a $x_V=0$.

Puisque V appartient à la droite Δ, on a d'autre part

$$y_V=\frac{5}{7}x_V-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow y_V=\frac{5}{7}\times 0-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow y_V=-\frac{6}{7}$$

Les coordonnées du point V sont $\left(\boldsymbol{0}\ ;\ -\frac{6}{7}\right)$

3. Puisque le point W appartient à l'axe des abscisses, on a $y_W=0$.

Puisque W appartient à la droite Δ, on a d'autre part

$$y_W=\frac{5}{7}x_W-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow 0=\frac{5}{7}x_W-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}x_W=-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow x_W=\frac{-\frac{6}{7}}{-\frac{5}{7}}$$
$$\Leftrightarrow x_W=-\frac{6}{7}\times\left(-\frac{7}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_W=\frac{6}{5}$$

Les coordonnées du point W sont $\left(\frac{6}{5}\ ;\ \boldsymbol{0}\right)$

4. Le point X appartient à Δ donc on a

$$y_X=\frac{5}{7}x_X-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow 10=\frac{5}{7}x_X-\frac{6}{7}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}x_X=-\frac{6}{7}-10$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}x_X=-\frac{76}{7}$$
$$\Leftrightarrow x_X=\frac{-\frac{76}{7}}{-\frac{5}{7}}$$
$$\Leftrightarrow x_X=-\frac{76}{7}\times\left(-\frac{7}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_X=\frac{76}{5}$$

Finalement l'abscisse du point X est $\frac{76}{5}$.