Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction du contrôle n° 2
Sujet A
Mardi 15 novembre 2022

Exercice 1

1. a. On a : $A \in D_1$ donc

$$-4x_A + 8y_A + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4 \times (-5) + 8y_A + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 29 + 8y_A = 0$$
$$\Leftrightarrow 8y_A = -29$$
$$\Leftrightarrow y_A = -\frac{29}{8}$$

L'ordonnée du point A est donc $-\frac{29}{8}$.

b. Puisque le point B appartient à l'axe des abscisses, on a $y_B = 0$. D'autre part $B \in D_1$ donc

$$-4x_B + 8y_B + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x_B + 8 \times 0 + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x_B + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x_B = -9$$
$$\Leftrightarrow x_B = \frac{-9}{-4}$$
$$\Leftrightarrow x_B = \frac{9}{4}$$

Les coordonnées du point B sont donc $\left(\frac{9}{4}\ ;0\right)$.

2. a. Puisque une équation cartésienne de la droite D_1 est $-4x + 8y + 9 = 0$, un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{u_1}(-8\ ;\ -4)$.

b. Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite D_1 si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$. Ceci est équivalent à :

$$\det(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}x_{\vec{v}} = 0$$
$$\Leftrightarrow -8 \times d - (-4) \times (-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -8d - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -8d = 8$$
$$\Leftrightarrow d = -1$$

Ainsi le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite D_1 si et seulement si $\boldsymbol{d = -1}$.

3. On a les équivalences suivantes :

$$-4x + 8y + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8y = 4x - 9$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4x-9}{8}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4x}{8} - \frac{9}{8}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}$$

L'équation réduite de la droite D_1 est donc $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}$.

Son coefficient directeur est $\frac{1}{2}$.

4. a. On a :

$$-4x_C + 8y_C + 9 = -4 \times (-1) + 8 \times (-2) + 9 = 4 - 16 + 9 = -3$$

Donc $-4x_C+8y_C+9\neq 0$. Le point C ne vérifie pas l'équation cartésienne de la droite D_1 donc il n'appartient pas à D_1.

b. SI la droite D_2 est parallèle à la droite D_1, le vecteur est aussi un vecteur directeur de la droite D_2. Cette droite possède donc une équation cartésienne de la forme

$$-4x+8y+c=0$$

Puisque le point C appartient à D_2, on a alors

$$\begin{aligned}&-4x_C+8y_C+c=0\\ \Leftrightarrow\ &-4\times(-1)+8\times(-2)+c=0\\ \Leftrightarrow\ &4-16+c=0\\ \Leftrightarrow\ &-12+c=0\\ \Leftrightarrow\ &c=12\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{D_2}$ est donc $\boldsymbol{-4x+8y+12=0}$.

<u>Exercice 2</u>

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KP}$.

On a

* $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}x_L-x_K\\ y_L-y_K\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}3-(-5)\\ -\frac{3}{2}-7\end{pmatrix}$ d'où

$$\boldsymbol{\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}8\\ -\frac{17}{2}\end{pmatrix}}$$

* $\overrightarrow{KP}\begin{pmatrix}x_P-x_K\\ y_P-y_K\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0-(-5)\\ 4-7\end{pmatrix}$ d'où

$$\boldsymbol{\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix}}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$$\det\left(\overrightarrow{KL}\ ;\ \overrightarrow{KP}\right)=x_{\overrightarrow{KL}}y_{\overrightarrow{KP}}-y_{\overrightarrow{KL}}x_{\overrightarrow{KP}}=8\times(-3)-(-3)\times\left(-\frac{17}{2}\right)=-24-\frac{51}{2}=-\frac{99}{2}$$

$\det\left(\overrightarrow{KL}\ ;\ \overrightarrow{KP}\right)\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KP}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points K, L et P ne sont pas alignés.

2. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KM}$ sont alors $(x+5\,;y-7)$

Ce point M est un point de la droite D si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}&\text{Les vecteurs } \overrightarrow{KM} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires}\\ \Leftrightarrow\ &\det\left(\overrightarrow{KM}\ ;\ \vec{w}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &x_{\overrightarrow{KM}}y_{\vec{w}}-y_{\overrightarrow{KM}}x_{\vec{w}}=0\\ \Leftrightarrow\ &(x+5)\times(-1)-(y-7)\times 6=0\\ \Leftrightarrow\ &-x-5-6y+42=0\\ \Leftrightarrow\ &-x-6y+37=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{D}$ est donc $\boldsymbol{-x-6y+37=0}$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{LP}$ est un vecteur directeur de la droite (LP).

Déterminons ses coordonnées :

* $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix}x_P-x_L\\ y_P-y_L\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix}0-3\\ 4-\left(-\frac{3}{2}\right)\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{LP}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}$

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LM}$ sont alors $\left(x-3\,;y+\frac{3}{2}\right)$

Ce point M est un point de la droite D si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

$$\text{Les vecteurs } \overrightarrow{LM} \text{ et } \overrightarrow{LP} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{LM}\ ;\ \overrightarrow{LP}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{LM}}y_{\overrightarrow{LP}} - y_{\overrightarrow{LM}}x_{\overrightarrow{LP}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3) \times \frac{11}{2} - \left(y + \frac{3}{2}\right) \times (-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{2}x - \frac{33}{2} + 3y + \frac{9}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{2}x + 3y - 12 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (LP) est donc $\frac{11}{2}x + 3y - 12 = 0$.

4. Puisque la droite D' est parallèle à la droite (LP), elle possède une équation cartésienne de la forme $\frac{11}{2}x + 3y + c = 0$

De plus, on a $K \in D'$ donc $\frac{11}{2}x_K + 3y_K + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{2} \times (-5) + 3 \times 7 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{55}{2} + 21 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{13}{2} + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{13}{2}$$

Finalement une équation cartésienne de D' est $\frac{11}{2}x + 3y + \frac{13}{2} = 0$

Exercice 3

1. a. Les points R et S ont des abscisses différentes donc la droite (RS) n'est pas verticale.
L'équation réduite de la droite (RS) est donc de la forme

$$y = mx + p$$

* Calculons le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = \frac{-1-7}{3-(-9)} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

b. L'équation réduite est donc de la forme

$$y = -\frac{2}{3}x + p$$

* Calculons l'ordonnée à l'origine p :

Puisque le point S appartient à la droite (RS), on a

$$y_S = -\frac{2}{3}x_S + p$$
$$\Leftrightarrow -1 = -\frac{2}{3} \times 3 + p$$
$$\Leftrightarrow -1 = -2 + p$$
$$\Leftrightarrow p = 1$$

Finalement l'équation réduite de (RS) est $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

c. Puisque le point U appartient à l'axe des abscisses, on a $y_U = 0$.
Puisque U appartient à la droite (RS) on a :

$$y_U = -\frac{2}{3}x_U - 1$$
$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{3}x_U - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x_U = -1$$
$$\Leftrightarrow x_U = \frac{-1}{\frac{2}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x_U = -\frac{3}{2}$$

Le point U a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\mathbf{0}\right)$.

2. L'équation réduite d'une droite verticale est de la forme $x = k$. Puisque le point T appartient à cette droite on a
$$x_T = k \Leftrightarrow 6 = k$$
Donc l'équation réduite de la droite verticale qui passe par le point $\boldsymbol{T}$ est $\boldsymbol{x = 6}$.

3. Appelons Δ la droite parallèle à (RT) qui passe par le point S. La droite (RT) n'est pas verticale car les points R et T n'ont pas la même abscisse. Puisque les droites Δ et (RT) sont parallèles, elles ont le même coefficient directeur m. Calculons le :
$$m = \frac{y_T - y_R}{x_T - x_R} = \frac{\frac{2}{5} - 7}{6 - (-9)} = \frac{-\frac{33}{5}}{15} = -\frac{33}{5} \times \frac{1}{15} = -\frac{11}{25}$$
L' équation réduite de la droite Δ est de la forme
$$y = -\frac{11}{25}x + p$$
Puisque S appartient à Δ, on a :
$$-\frac{11}{25}x_S + p = y_S$$
$$\Leftrightarrow -\frac{11}{25} \times 3 + p = -1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{33}{25} + p = -1$$
$$\Leftrightarrow p = -1 + \frac{33}{25}$$
$$\Leftrightarrow p = -\frac{8}{25}$$
Finalement l'équation réduite de Δ est $\boldsymbol{y = -\frac{11}{25}x - \frac{8}{25}}$.

Exercice 4

1. a. On peut lire graphiquement les coordonnées des points A et B :
$$A(-3\,;5) \text{ et } B(4\,;2)$$
La droite Δ n'est pas verticale puisque les points A et B n'ont pas la même abscisse. Son équation réduite est le forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur de Δ est
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 5}{4 - (-3)} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$
L'équation réduite de Δ est donc de la forme
$$y = -\frac{3}{7}x + p$$
Puisque le point B appartient à cette droite on a :

$$-\frac{3}{7}x_B + p = y_B$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{7} \times 4 + p = 2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{12}{7} + p = 2$$
$$\Leftrightarrow p = 2 + \frac{12}{7} \Leftrightarrow p = \frac{26}{7}$$

Finalement l'équation réduite de Δ est $\boldsymbol{y = -\frac{3}{7}x + \frac{26}{7}}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite Δ . Or on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ 2 - 5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque le point V appartient à l'axe des ordonnées, on a $x_V = 0$.
Puisque V appartient à la droite Δ, on a d'autre part

$$y_V = -\frac{3}{7}x_V + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow y_V = -\frac{3}{7} \times 0 + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow y_V = \frac{26}{7}$$

Les coordonnées du point $\boldsymbol{V}$ sont $\boldsymbol{\left(0 \,;\, \frac{26}{7}\right)}$

3. Puisque le point W appartient à l'axe des abscisses, on a $y_W = 0$.
Puisque W appartient à la droite Δ, on a d'autre part

$$y_W = -\frac{3}{7}x_W + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{3}{7}x_W + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7}x_W = \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow x_W = \frac{\frac{26}{7}}{\frac{3}{7}}$$
$$\Leftrightarrow x_W = \frac{26}{7} \times \frac{7}{3}$$
$$\Leftrightarrow x_W = \frac{26}{3}$$

Les coordonnées du point $\boldsymbol{W}$ sont $\boldsymbol{\left(\frac{26}{3} \,;\, 0\right)}$

4. Le point X appartient à Δ donc on a

$$y_X = -\frac{3}{7}x_X + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow 10 = -\frac{3}{7}x_X + \frac{26}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7}x_X = \frac{26}{7} - 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7}x_X = -\frac{44}{7}$$
$$\Leftrightarrow x_X = \frac{-\frac{44}{7}}{\frac{3}{7}}$$
$$\Leftrightarrow x_X = -\frac{44}{7} \times \frac{7}{3}$$
$$\Leftrightarrow x_X = -\frac{44}{3}$$

Finalement l'abscisse du point X est $\boldsymbol{-\frac{44}{3}}$.