

Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de
l'interrogation de mathématiques n° 3
 Sujet A
 Mardi 22 mars 2022

Exercice 1

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 5 \times 13x^{12}$$

Soit

$$\boxed{f'(x) = 65x^{12}}$$

b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$g'(x) = 2 \times (-6)x^{-7}$$

Soit

$$\boxed{g'(x) = -\frac{12}{x^7}}$$

c. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = -3 \times 4x^3 + 8 \times 2x + 0$$

Soit

$$\boxed{h'(x) = -12x^3 + 16x}$$

d. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Soient u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = 4x^2 - 5x + 3$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } v'(x) = 8x - 5$$

On a $k(x) = u(x)v(x)$ donc

$$\begin{aligned} k'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2 - 5x + 3) + \sqrt{x}(8x - 5) \end{aligned}$$

Soit si on met cette expression au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{4x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{x}^2(8x - 5)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x^2 - 5x + 3 + 16x^2 - 10x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\boxed{k'(x) = \frac{20x^2 - 15x + 3}{2\sqrt{x}}}$$

e. La fonction r est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons $v(x) = 4x^2 + 2$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout

$$v'(x) = 8x$$

On a

$$r(x) = -7 \times \frac{1}{v(x)}$$

Donc

$$r'(x) = -7 \times \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = -7 \times \frac{-8x}{(4x^2 + 2)^2}$$

Soit finalement

$$r'(x) = \frac{56x}{(4x^2 + 2)^2}$$

f. La fonction s est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{6}\right\}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{6}\right\}$

$$u(x) = -8x + 9 \text{ et } v(x) = 5 - 6x$$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{6}\right\}$ avec

$$u'(x) = -8 \text{ et } v'(x) = -6$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{8}{9}\right\}$

$$s(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Donc

$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-8(5 - 6x) - (-8x + 9) \times (-6)}{(5 - 6x)^2} \\ &= \frac{-40 + 48x - 48x + 54}{(5 - 6x)^2} \end{aligned}$$

Finalement

$$s'(x) = \frac{14}{(5 - 6x)^2}$$

g. La fonction t est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^8$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 8x^7$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $t(x) = f(-3x + 4)$

donc

$$t'(x) = -3 \times f'(-3x + 4) = -3 \times 8(-3x + 4)^7$$

Finalement

$$t'(x) = -24(-3x + 4)^7$$

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $[-4 ; 3]$ et pour tout $x \in [-4 ; 3]$:

$$f'(x) = -3 \times 2x + 1 + 0 = -6x + 1$$

$$\text{On a } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

où $\frac{1}{6} \in [-4 ; 3]$

La fonction f' est une fonction affine strictement décroissante. On a donc le tableau suivant :

x	-4	$-\frac{1}{6}$	3
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$\nearrow$	$\frac{37}{12}$	$\searrow$
	-49		-21

$$* f(-4) = -3 \times 16 - 4 + 3 = -49$$

$$* f(3) = -3 \times 9 + 3 + 3 = -21$$

$$* f\left(\frac{1}{6}\right) = -3 \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + 3 = \frac{37}{12}$$

2. La fonction f est dérivable sur $[-2 ; 1]$ par :

$$f'(x) = 8 \times 3x^2 - 5 \times 2x = 24x^2 - 10x = 2x(12x - 5)$$

On a les équivalences

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(12x - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{12}$$

avec $0 \in [-2 ; 1]$ et $\frac{5}{12} \in [-2 ; 1]$.

La fonction f' est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est $24 > 0$. On a donc le tableau suivant :

x	-2	0	$\frac{5}{12}$	1
Signe de $f'(x)$	+	0	-	+
Variations de f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$
	-84		$-\frac{125}{432}$	3

$$* f(-2) = 8 \times (-8) - 5 \times 4 = -64 - 20 = -84$$

$$* f(0) = 0$$

$$* f\left(\frac{5}{12}\right) = 8 \times \frac{5^3}{12^3} - 5 \times \frac{5^2}{12^2} = \frac{-125}{432}$$

$$* f(1) = 8 \times 1 - 5 \times 1 = 3$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$$f'(x) = \frac{4(2 - 3x) - (-3)(4x + 9)}{(2 - 3x)^2} = \frac{8 - 12x + 12x + 27}{(2 - 3x)^2} = \frac{35}{(2 - 3x)^2} > 0$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	//	+
Variations de f	$\nearrow$	//	$\nearrow$
		//	