Spécialité mathématiques
Classe de première
Correction de
l'interrogation de mathématiques n° 3
Sujet A
Mardi 22 mars 2022

Exercice 1

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 3 \times 11x^{10}$$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = 33x^{10}}}$$

b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$g'(x) = 4 \times (-5)x^{-6}$$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = -\frac{20}{x^6}}}$$

c. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = -2 \times 4x^3 + 6 \times 2x + 0$$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = -8x^3 + 12x}}$$

d. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
Soient u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } v'(x) = 6x - 2$$

On a $k(x) = u(x)v(x)$ donc

$$k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 - 2x + 5) + \sqrt{x}(6x - 2)$$

Soit si on met cette expression au même dénominateur, on obtient :

$$k'(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5 + 2\sqrt{x}^2(6x - 2)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3x^2 - 2x + 5 + 12x^2 - 4x}{2\sqrt{x}}$$

Soit finalement

$$\boxed{\boldsymbol{k'(x) = \frac{15x^2 - 6x + 5}{2\sqrt{x}}}}$$

e. La fonction r est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Posons $v(x) = 6x^2 + 1$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout

$$v'(x) = 12x$$

On a

$$r(x) = -8 \times \frac{1}{v(x)}$$

Donc

$$r'(x) = -8 \times \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = -8 \times \frac{-12x}{(6x^2+1)^2}$$

Soit finalement

$$\boxed{\boldsymbol{r'(x) = \frac{96x}{(6x^2+1)^2}}}$$

f. La fonction s est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{9}\right\}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{9}\right\}$

$$u(x) = -6x + 5 \text{ et } v(x) = 8 - 9x$$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{9}\right\}$ avec

$$u'(x) = -6 \text{ et } v'(x) = -9$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{9}\right\}$

$$s(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Donc

$$s'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$= \frac{-6(8-9x) - (-6x+5) \times (-9)}{(8-9x)^2}$$
$$= \frac{-48 + 54x - 54x + 45}{(8-9x)^2}$$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{s'(x) = \frac{-3}{(8-9x)^2}}}$$

g. La fonction t est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t(x) = (-2x+7)^9$$

La fonction t est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^9$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 9x^8$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t(x) = f(-2x+7)$
donc

$$t'(x) = -2 \times f'(-2x+9) = -2 \times 9(-2x+9)^8$$

Finalement

$$\boxed{\boldsymbol{t'(x) = -18(-2x+9)^8}}$$

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $[-4\,;3]$ et pour tout $x \in [-4\,;3]$:

$$f'(x) = -5 \times 2x + 1 + 0 = -10x + 1$$

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x + 1 = 0 \Leftrightarrow 10x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

où $\frac{1}{10} \in [-4\,;3]$

La fonction f' est une fonction affine strictement décroissante. On a donc le tableau suivant :

x	-4		$\frac{1}{10}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-79	$\nearrow$	$5{,}05$	$\searrow$	-37

* $f(-4) = -5 \times 16 - 4 + 5 = -79$
* $f(3) = -5 \times 9 + 3 + 5 = -37$
* $f\left(\frac{1}{10}\right) = -5 \times \frac{1}{100} + \frac{1}{10} + 5 = 5{,}05$

2. La fonction f est dérivable sur $[-2\,;1]$ par :

$$f'(x) = 7 \times 3x^2 - 9 \times 2x = 21x^2 - 18x = 3x(7x - 6)$$

On a les équivalences

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(7x - 6) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{6}{7}$$

avec $0 \in [-2\,;1]$ et $\frac{6}{7} \in [-2\,;1]$.

La fonction f' est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est $21 > 0$. On a donc le tableau suivant :

x	-2		0		$\frac{6}{7}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-91	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{108}{49}$	$\nearrow$	-2

* $f(-2) = 7 \times (-8) - 9 \times 4 = -56 - 36 = -91$
* $f(0) = 0$
* $f\left(\frac{6}{7}\right) = 7 \times \frac{6^3}{7^3} - 9 \times \frac{6^2}{7^2} = \frac{-108}{49}$
* $f(1) = 7 \times 1 - 9 \times 1 = -2$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{3(5 - 2x) - (-2)(3x + 8)}{(5 - 2x)^2} = \frac{15 - 6x + 6x + 16}{(5 - 2x)^2} = \frac{31}{(5 - 2x)^2} > 0$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	//	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	//	$\nearrow$	