**Spécialité mathématiques**
**Classe de première**
**Contrôle n° 4**
Sujet B
Lundi 7 mars 2022

La calculatrice est autorisée. Le barème est indicatif.

Le sujet à rendre avec la copie.

**Exercice 1** (7 points)

Les questions 1 à 4 sont indépendantes entre elles.

**1.** On considère la suite $(s_n)$ définie par
$$s_n = 3n^2 + 4n - 6$$
Etudier le sens de variation de $(s_n)$.

**2.** On considère la suite $(r_n)$ définie par
$$r_n = \frac{2}{n+7}$$
Etudier le sens de variation de $(r_n)$.

**3.** On considère la suite $(t_n)$ définie par
$$t_n = \frac{2^{n+2}}{5^n}$$

**a.** Calculer $t_0$ et $t_1$.

**b.** Montrer que la suite $(t_n)$ est géométrique et préciser sa raison.

**c.** On considère la somme $T = t_0 + t_1 + \cdots t_{30}$. Donner une expression exacte de la somme $T$ puis en donner une valeur approchée au centième.

**4.** On considère la suite $(g_n)$ telle que $g_1 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$g_{n+1} = g_n - 5n$$

**a.** Calculer $g_2$ et $g_3$.

**b.** Exprimer $g_{n+2}$ en fonction de $g_n$.

**c.** Indiquer sans justification si la suite $(g_n)$ est arithmétique et, si oui, préciser sa raison.

**Exercice 2** (7 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 3$$

**1. a.** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

**2.** On considère la suite $(w_n)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = u_n - 12$$

**a.** Démontrer que la suite $(w_n)$ est géométrique et de raison $\frac{3}{4}$.

**b.** Calculer $w_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $w_n$ en fonction de $n$.

**c.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**3.** Déterminer le sens de variation de la suite $(w_n)$ et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**4.** On admet que les termes de la suite $(u_n)$ sont aussi proches que l'on veut de 12 dès que le rang $n$ est suffisamment grand.

On considère le programme suivant :

```
U ← 5
N ← 0
Tant que |U − 12 | > 0,01 faire :
        U ← U * 0,75 + 3
        N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

On a écrit ce programme dans un langage de programmation quelconque puis on l'a exécuté. Le programme a affiché le nombre 23. Que signifie ce nombre pour la suite $(u_n)$ ?

**Exercice 3** (6 points)

**1.** La population de la ville Alpha était de $4\ 300$ habitants le 1er janvier 2015. On admet que cette ville augmente de $5\ \%$ tous les ans.
On représente l'évolution de la population de la ville par la suite $(a_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $a_n$ représente le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $2015 + n$.
On a donc $a_0 = 4\ 300$.

**a.** Justifier que la suite $(a_n)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$a_{n+1} = 1{,}05a_n$$

**b.** Préciser la nature de la suite $(a_n)$ et déterminer l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.

**c.** Quelle sera la population de la ville au 1er janvier 2023 ? On arrondira le résultat à l'unité.

**2.** La population de la ville Betha était de $6\ 800$ habitants le 1er janvier 2015. On admet que cette ville augmente de 19 habitants tous les ans.
On représente l'évolution de la population de la ville par la suite $(b_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $b_n$ représente le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $2015 + n$. On a donc $b_0 = 6\ 800$.

**a.** Justifier que la suite $(b_n)$ est arithmétique de raison 19.

**b.** Déterminer l'expression de $b_n$ en fonction de $n$.

**c.** Quelle sera la population de la ville au 1er janvier 2023 ? On arrondira le résultat à l'unité.

**d.** A partir de quelle année la population sera-t-elle supérieure à $9\ 000$ habitants ?

**Question bonus**

**a.** Ecrire l'inéquation qui permettrait de déterminer à partir de quelle année la population de la ville Alpha sera supérieure à celle de la ville Betha. Attention, il ne s'agit pas de résoudre cette équation.

**b.** Écrire en pseudo-code ou en Python un programme qui permette de répondre à la même question.