

Chapitre 5 : Dérivation (2) : dérivation et étude de fonction

I Compléments sur la dérivation

I.1 Opérations sur les fonctions dérivables

a) Produit de deux fonctions dérivables

Propriété 1 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

Démonstration (*) : Soit $a \in I$. Pour tout réel $x \in I \setminus \{a\}$, le taux de variation de la fonction $u \times v$ entre a et x est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} V_a(x) &= \frac{u(x) \times v(x) - u(a) \times v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x) \times v(x) - u(x) \times v(a) + u(x) \times v(a) - u(a) \times v(a)}{x - a} \\ &= u(x) \times \frac{v(x) - v(a)}{x - a} + \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \times v(a) \end{aligned}$$

Or on a :

$$* \lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$$

$$* \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} = v'(a) \text{ puisque } v \text{ est dérivable en } a ;$$

$$* \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a) \text{ puisque } u \text{ est dérivable en } a.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} V_a(x) = u(a) \times v'(a) + u'(a) \times v(a)$$

Ainsi la fonction $u \times v$ est dérivable en a et son nombre dérivé en a est :

$$(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$$

Exemple 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}(5x^2 - 2x + 7)$. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = \frac{25x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}}$$

b) Inverse d'une fonction dérivable

Propriété 2 : Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Démonstration : propriété admise.

Exemple 2 : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

c) Quotient de deux fonctions dérivables

Propriété 3 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Démonstration : Cette propriété se déduit des deux propriétés précédentes de la façon suivante. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout $x \in I$ $v(x) \neq 0$. On note f la fonction $\frac{u}{v}$. On a alors pour tout $x \in I$ $f(x) = u(x) \times \frac{1}{v(x)}$ et les fonctions u et $\frac{1}{v}$ sont dérivables. Donc, d'après la propriété du produit de deux fonctions dérivables, f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times \frac{1}{v(x)} + u(x) \times \left(\frac{1}{v}\right)'(x) \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x) \times \left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right) \end{aligned}$$

Soit en mettant au même dénominateur, on obtient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Exemple 3 : La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = \frac{4x - 5}{x^2 + 1}$$

Démontrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$k'(x) = \frac{-4x^2 + 10x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

1.2 Dérivée d'une fonction de la forme x^n , où $n \in \mathbb{Z}$

Propriété 4 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^n$.

* Si $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}$

* Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (n est un entier strictement négatif) l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}^*$

La fonction f est dérivable sur D et pour tout $x \in D$ on a :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Démonstration :

(A) Démontrons la formule pour $n \in \mathbb{N}$

* Par les formules de dérivation vues au chapitre 4, on vérifie aisément que la formule est valide pour $n = 0$ (mais aussi pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$).

* Soit k un entier naturel. Si la fonction $g(x) = x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = kx^{k-1}$$

Alors on peut démontrer alors que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^{k+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (k+1)x^k$

En effet, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = xg(x)$$

donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et d'après la formule de dérivation d'un produit de fonctions vue au chapitre 4, on a :

$$h'(x) = 1 \times g(x) + x \times g'(x) = x^k + x \times kx^{k-1} = (k+1)x^k$$

* Nous avons démontré que la formule est vérifiée pour $n = 0$ et que, si elle est vraie pour $n = k$, alors elle est aussi vraie pour $n = k+1$. Donc elle est vraie pour tout n entier naturel.

(B) A partir de la propriété démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons en déduire avec la propriété 2, qu'elle est aussi vraie pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Exemples 4 :

(a) Considérons la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = x^9$

D'après la propriété, m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$m'(x) = 9x^8$$

(b) Considérons la fonction n définie sur $\mathbb{R}^*$ par $n(x) = \frac{1}{x^4}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$n(x) = x^{-4}$$

Donc, d'après la propriété, la fonction n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$n'(x) = -4 \times x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

I.3 Fonction de la forme $f(ax + b)$

Propriété 5 : Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I , a et b deux réels et J un intervalle tel que, pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$.

Soit la fonction f définie sur J par $f(x) = u(ax + b)$. La fonction f est dérivable sur J et pour tout $x \in J$ on a :

$$f'(x) = au'(ax + b)$$

Démonstration : propriété admise.

Exemples 5 :

(a) Considérons la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = (8x - 7)^5$

Démontrer que la fonction r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$r'(x) = 40(8x - 7)^4$$

(b) Considérons la fonction s définie sur $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right]$ par :

$$s(x) = \sqrt{-3x + 5}$$

Démontrer que la fonction s est dérivable sur $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right[$ et que pour tout $x < \frac{5}{3}$, on a :

$$s'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{-3x + 5}}$$

I.4 Nouveaux tableaux récapitulatifs

a) Dérivées de fonctions usuelles

ensemble de définition	fonction f	dérivable sur	fonction dérivée f'
$D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$ $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$	D_f	$f'(x) = m$
$D_f = \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ $D_f = \mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}^*$	D_f	$f'(x) = nx^{n-1}$
$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	D_f	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$D_f = [0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f \setminus \{0\} =]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Opérations sur des fonctions

Les fonctions u et v sont supposées dérivables sur un intervalle I .

* Dans le cas des fonctions $\frac{1}{v(x)}$ et $\frac{u(x)}{v(x)}$ on suppose aussi que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

* Dans le cas de la fonction $u(ax + b)$, on suppose que $x \in J$ tel que $ax + b \in I$.

Alors la fonction f , formée à partir des fonctions u et v , est définie et dérivable et on a :

fonction f	fonction dérivée f'
$f(x) = ku(x)$ où $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \frac{1}{v(x)}$	$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$f(x) = u(ax + b)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = au'(ax + b)$

II Variations d'une fonction et étude de la fonction dérivée

II.1 Relation entre le sens de variation de la fonction f et le signe de sa dérivée f'

Soient

- * f une fonction ;
- * I un intervalle (non vide et non ponctuel) tel que $I \subset D_f$.

On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I .

a) La relation entre le sens de variation de f avec le signe de la dérivée f'

Théorème 6 :

- (1) f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- (2) f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Démonstration : théorème admis.

Remarque : Il faut bien noter que ce théorème donne à chaque fois une implication dans les deux sens. On peut :

- * déduire le signe de la dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle I à partir du sens de variation de la fonction f sur I ;
- * déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I à partir du signe de $f'(x)$ sur I .

Corollaire 7 : La fonction f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Démonstration : D'après le théorème précédent, on a les équivalences suivantes :

f est constante sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante et décroissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$

b) Une condition suffisante de stricte monotonie

On souhaite toutefois disposer d'une propriété qui nous permette de conclure à la *stricte monotonie* d'une fonction. En effet, pour tracer le tableau de variation d'une fonction, on doit connaître les intervalles sur lesquels elle est strictement monotone. La propriété qui suit assure ce résultat.

Propriété 8 : On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I .

- (1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est *strictement* croissante sur I .
- (2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est *strictement* décroissante sur I .

Démonstration : propriété admise.

Remarques :

(a) Une conséquence de cette propriété est la suivante :

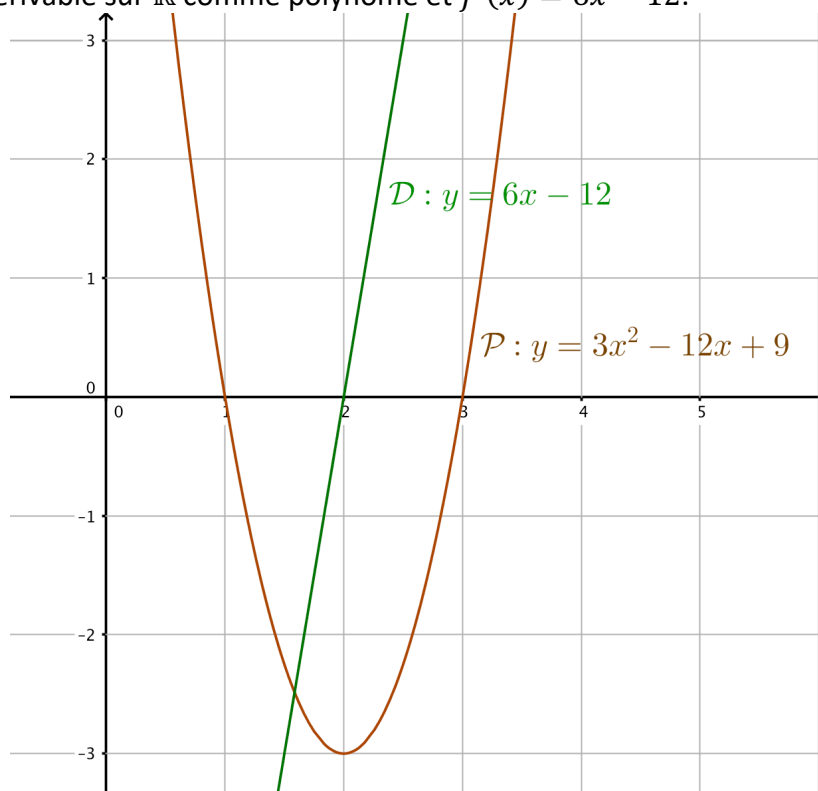
Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, (respectivement $f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

(b) La réciproque de cette conséquence est fautive : le fait que la fonction f soit strictement croissante et dérivable sur I n'implique pas que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.

Par exemple la fonction cube définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ on a donc $f'(0) = 0$.

II.2 Une illustration de la relation entre une fonction et sa dérivée

On considère la fonction polynôme du second degré $f(x) = 3x^2 - 12x - 5$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et $f'(x) = 6x - 12$.



On a représenté ci-dessus la parabole $\mathcal{P}$ qui représente la fonction f et la droite $\mathcal{D}$ qui représente la fonction f' .

On voit que :

- * lorsque f est décroissante, la fonction f' est négative (la droite $\mathcal{D}$ est en dessous de l'axe des abscisses) ;
- * lorsque f est croissante, la fonction f' est positive (la droite $\mathcal{D}$ est au dessus de l'axe des abscisses).
- * Le coefficient directeur de la tangente en un point M de la parabole $\mathcal{P}$ d'abscisse x est donné par $f'(x)$.
- * Au point d'abscisse 2, la fonction f' s'annule et la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 2 est horizontale.

II.3 Déterminer les extrema d'une fonction par sa dérivée

Soient

- * f une fonction ;
- * I un intervalle (non vide et non ponctuel) tel que $I \subset D_f$.

a) Notions d'extremum global et d'extremum local d'une fonction

Définitions :

(1) Soient M un réel. On dit que M est le **maximum** de f sur I si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- * il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$;
- * pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.

On dit alors que le maximum de f sur I **est atteint en a** .

(2) Soient m un réel. On dit que m est le **minimum** de f sur I si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- * il existe $b \in I$ tel que $f(b) = m$;
- * pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

On dit aussi que le minimum de f sur I **est atteint en b** .

(3) On dit qu'un réel E est un **extremum** de f sur I si E est un maximum ou un minimum de f sur I .

Remarques :

- (a) Il est possible qu'une fonction ne possède pas de maximum ou de minimum sur un intervalle donné.
- (b) Si une fonction possède un maximum (resp. un minimum) alors il est unique.
- (c) Il est possible que le maximum ou le minimum de f sur I soit *atteint en plusieurs valeurs* de l'intervalle I .

Définitions : Soit A un réel.

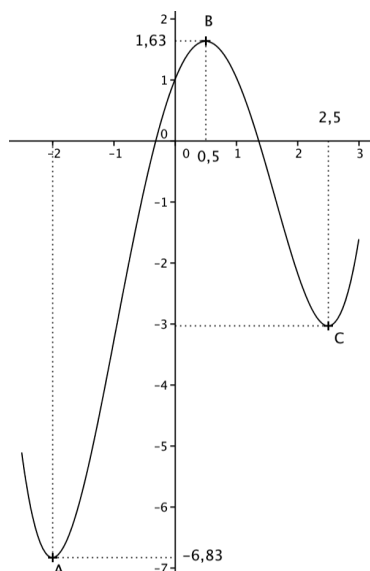
(1) On dit que A est un **maximum local de f sur I** (resp. **minimum local de f sur I**) si il existe un *intervalle ouvert* J tel que $J \subset I$ et A est le maximum (resp. le minimum) de f sur J .

(2) On dit que A est un **extremum local de f sur I** si A est maximum local ou un minimum local de f sur I .

(3) Soit $a \in I$. On dit que f **admet un extremum local en a** si $f(a)$ est un extremum local de f sur I .

Remarque : Pour bien marquer la distinction entre « maximum » et « maximum local », on utilise parfois l'expression de « maximum global » ou de « maximum absolu » pour désigner le maximum (non local).

Illustration des notions de maximum et minimum locaux



La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessus représente une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2,5 ; 3]$. Sur cet intervalle, f admet :

- * un maximum local : 1,63 atteint en 0,5 ;
- * deux minimums locaux : -3 atteint en 2,5 et -6,83 atteint en -2.

De plus, 1,63 est le *maximum global* et -6,83 est le *minimum global* de f sur I .

On remarque que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisse -2 ; 0,5 et 2,5 sont horizontales.

b) Condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local

Propriété 9 : On suppose que la fonction f est dérivable sur I . Soit $a \in I$. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration : propriété admise.

Remarques :

- (a) La courbe représentative de la fonction f admet alors *une tangente horizontale en a* .
- (b) La condition $f'(a) = 0$ est *nécessaire* pour que f admette un extremum local en a . En revanche, *cette condition n'est pas suffisante*.

Par exemple, la fonction cube admet une dérivée nulle en 0 (puisque sa dérivée est nulle en 0) mais elle n'atteint pas un extremum local en 0 (puisque la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

- (c) Le théorème n'est pas vrai en général pour un extremum *non local*.

c) Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un extremum local

Propriété 10 : On suppose que la fonction f est dérivable sur I . Soit $a \in I$ tel que a n'est pas une borne de I .
 f admet un extremum local en a si et seulement si $f'(a) = 0$ et la fonction dérivée f' change de signe en a .

Démonstration : propriété admise.