Chapitre 4
Les suites numériques

Rappel des notations :
* $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels
* $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls ;
* $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

I Généralités sur les suites numériques

I.1 Notions de suite, vocabulaire et notations

Définitions : Une **suite numérique** $\boldsymbol{u}$ est une fonction qui, à pour tout entier naturel n, associe un réel noté $\boldsymbol{u(n)}$ ou $\boldsymbol{u_n}$.
On dit alors que u_n est le **terme de rang** $\boldsymbol{n}$ de cette suite.
La suite numérique u est aussi désignée par la notation $(\boldsymbol{u_n})$ ou $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$.

Remarque : L'ensemble de définition d'une suite numérique est donc $\mathbb{N}$. Il arrive toutefois que la suite commence en un rang p tel que $p > 0$, c'est-à-dire qu'elle soit définie sur $\mathbb{N}\backslash\{0 ; \ldots ; p-1\}$. On dit alors que u_p est le **terme initial** de la suite. Si on parle d'une suite numérique sans préciser à partir de quel rang elle est définie, alors elle est définie à partir du rang 0, donc sur $\mathbb{N}$.

Remarques sur le vocabulaire et les notations

• On se représente généralement une suite numérique u comme une succession infinie de réels :
u_0, u_1, u_2, etc.
Le *rang* d'un terme exprime donc *sa place* dans la succession.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour désigner l'image de n par la suite u on utilise de préférence la notation u_n plutôt que la notation $u(n)$. Cette notation se lit « u indice n ».
Par exemple, l'image de 3 par la suite u se note u_3 : u_3 est le *terme* de *rang* 3 de la suite u.
• La notation (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec les parenthèses) désigne *l'ensemble de la suite*, c'est-à-dire la succession de tous ses termes et non pas un seul de ses termes.
• Il faut bien distinguer les notations suivantes :
   * u_{n+1} qui signifie $u(n+1)$: le terme de rang $n+1$, c'est-à-dire le terme qui succède au terme u_n ;
   * $u_n + 1$ qui signifie $u(n)+1$: la somme de u_n et de 1.

I.2 Deux méthodes classiques pour définir une suite

a) Définition explicite

On dit qu'une suite (u_n) est définie par une **formule explicite** ou (une **formule directe**) lorsque l'on connaît l'expression de la fonction f dont l'ensemble de définition inclus $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f(n).$$

Remarque : Si on connaît la fonction f et si la suite (u_n) vérifie la propriété suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$

alors on peut calculer tous les termes de la suite (u_n).
Exemple :

…

b) Définition par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est définie par une **formule de récurrence** lorsqu'on dispose des informations suivantes :

* on connaît la *valeur du terme initial* de la suite, c'est-à-dire que l'on connaît un réel a tel que $u_0 = a$ (ou $u_p = a$ si la suite commence au rang p) ;

* on connaît l'expression d'une fonction g telle que, pour tout entier n, on a :

$$u_n \in D_g \text{ et } u_{n+1} = g(u_n).$$

Ces deux informations sont le plus souvent présentées de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Remarque : Si on connaît la fonction g et si la suite (u_n) vérifie la propriété suivante :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$

alors, à partir d'un terme u_n (de rang n quelconque) on sait calculer le terme de rang suivant (de rang $n+1$). On peut donc là encore calculer tous les termes de la suite (u_n).

Exemple :

...

I.2 Représentation graphique d'une suite

On peut représenter graphiquement une suite (u_n) dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ en associant à chaque terme u_n de la suite le point A_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Si la suite (u_n) est définie par une formule explicite à partir d'une fonction f par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = f(n).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point A_n a pour coordonnées $(n\,;f(n))$. Il appartient donc à la courbe C_f représentative de la fonction f. La succession des points A_n est donc formée par tous les points de la courbe C_f *dont l'abscisse est un nombre entier*.

Exemple : On considère la suite (u_n) telle que :

$$u_n = \frac{2}{3}n^3 - 2n^2 - 2n + 2.$$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + 2$$

On a :

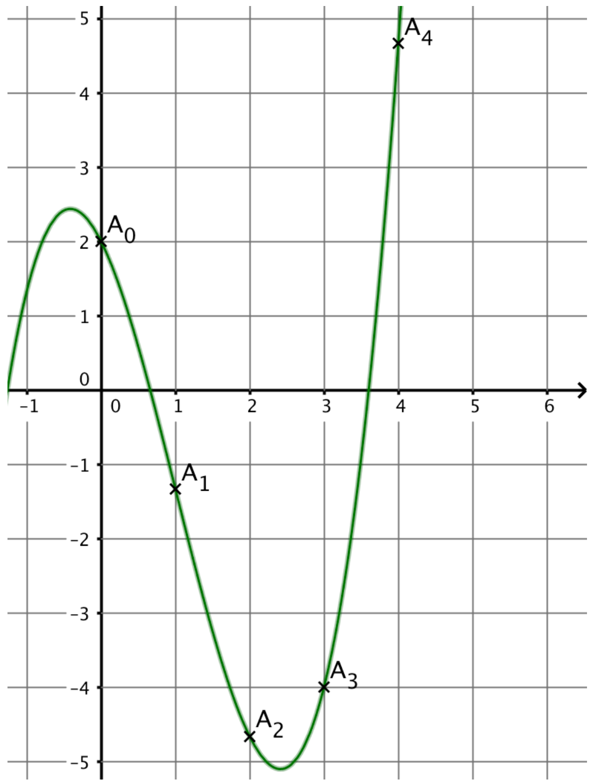
$u_0 = f(0) = 2$; $\quad u_1 = f(1) = -\frac{4}{3}$; $\quad u_2 = f(2) = -\frac{14}{3}$

$u_3 = f(3) = -4$; $\quad u_4 = f(4) = \frac{14}{3}$

Les premiers points de la représentation graphique sont donc :

$$A_0(0\,;2)\,;A_1\left(1\,;-\frac{4}{3}\right);A_2\left(2\,;-\frac{14}{3}\right);A_3(3\,;-4)\,;A_4\left(4\,;\frac{14}{3}\right);\text{ etc.}$$

On a donc la représentation graphique suivante :



A_0
A_1
A_2
A_3
A_4

II Suites arithmétiques

II.1 Définition d'une suite arithmétique

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

On dit alors que r est la **raison** de la suite arithmétique.

Remarques :

(a) Si on sait qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors on dispose de la *formule par récurrence* suivante de la suite (u_n) :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Une suite arithmétique est donc entièrement définie par sa raison r et la valeur de son terme initial.

(b) Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la *différence entre deux termes consécutifs* $u_{n+1} - u_n$ est indépendante du rang n . Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, on doit donc avoir l'égalité :

$$u_{p+1} - u_p = u_{q+1} - u_q$$

Cette différence constante est la raison de cette suite arithmétique.

Déterminer si une suite (u_n) est arithmétique

On considère une suite (u_n) définie par une formule explicite. Pour déterminer si une suite (u_n) est arithmétique, on pourra :

(a) exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction du rang n

(b) puis observer si cette différence dépend ou non du rang n.

* Si la différence $u_{n+1} - u_n$ *ne dépend pas de* n alors **la suite** $(\boldsymbol{u_n})$ **est arithmétique** et la différence trouvée est la raison de la suite.

* Si la différence $u_{n+1} - u_n$ ne prend pas toujours la même valeur selon la valeur de n alors **la suite** $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas arithmétique**.

Exemples :

(1) Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $\frac{2}{7}$ et de premier terme $v_0 = -2$. Calculer les termes v_1 et v_2.

(2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -5n + 8$$

La suite (u_n) est-elle arithmétique ? et, si oui, quelle est sa raison ?

(3) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n^2 + 1$$

La suite (v) est-elle arithmétique ? et, si oui, quelle est sa raison ?

...

II.2 Formule explicite d'une suite arithmétique

Propriétés : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

(2) Soient n et p deux entiers naturels. On a alors :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Démonstration :
(1) On a :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$\dots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (u_o + r) + (u_1 + r) + \cdots + (u_{n-1} + r)$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + n \times r$$

Chacun des deux membres de cette égalité comporte la somme $u_1 + \cdots + u_{n-1}$. En simplifiant, on obtient alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

(2) On a donc :

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_p = u_0 + pr.$$

Donc :

$$u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r.$$

On en déduit

$$u_q = u_p + (q-p)r$$

Remarques :
(a) La partie (2) de la propriété est une généralisation de la partie (1).
(b) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si le premier terme $u_0 = b$ et la raison r sont connus, on peut donc écrire une formule explicite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$$

où f est la *fonction affine* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = rx + b.$$

r est donc le *coefficient directeur* et b est *l'ordonnée à l'origine* de cette fonction affine.

II.3 Représentation graphique d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = a$. D'après la propriété précédente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = rn + a$.
Autrement dit, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = rx + a.$$

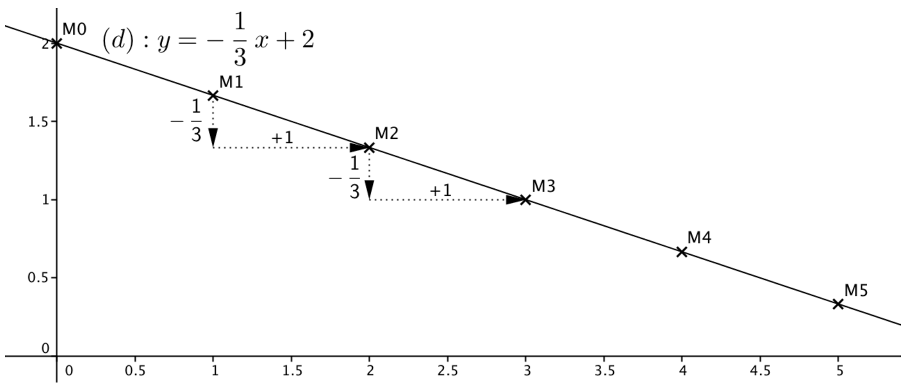
La représentation graphique de la suite (u_n) est donc formée par les points $M_n(n\ ;\ u_n)$ de la courbe représentative de f dont l'abscisse est un entier naturel. Ces points appartiennent donc à la droite d'équation :

$$y = rx + a.$$

Exemple : La suite arithmétique (u_n) de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$ vérifie la formule explicite suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = -\frac{1}{3}n + 2$$

Elle est donc représentée par les points de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$ dont l'abscisse est un entier naturel.



II.3 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

a) Somme des n premiers entiers naturels

Propriété : Soit n un entier naturel. On a l'égalité suivante :

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque : La somme $1+2+\cdots+n$ se note également :

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

Démonstration : Notons S la somme $1+2+\cdots+(n-1)+n$.
On peut aussi écrire, en inversant l'ordre des termes :

$$S=n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}2S &= (1+2+\cdots+n) \\ &\quad +(n+(n-1)+\cdots+1) \\ &= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n+1) \\ &= n\times(n+1)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple :

...

b) Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique (HP)

Propriété : Soient (u_n) une suite arithmétique et p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$. On a l'égalité suivante :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q=(q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$$

Démonstration : admis

Remarques:

(a) La somme $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q$ se note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

On peut donc réécrire l'égalité sous la forme suivante

$$\sum_{k=p}^{q} u_k=(q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$$

(b) Dans l'expression de droite, on peut remarquer que

* $q-p+1$ est le nombre de termes dans la somme ;

* $\frac{u_p+u_q}{2}$ est la moyenne des termes extrèmes de la somme.

III Suites géométriques

III.1 Définition d'une suite géométrique

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

On dit alors que le réel q est la **raison** de la suite géométrique.

Remarques : Si on sait qu'une suite (u_n) est une suite géométrique et si la raison q et le premier terme $u_0 = a$ sont connus, alors on dispose d'une définition par récurrence de la suite (u_n) :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Exemple :

...

III.2 Formule explicite d'une suite géométrique

Propriétés : Soit une suite géométrique (u_n) de raison q.
(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 q^n.$$

(2) Soient p et k deux entiers naturels. On a alors :

$$u_p = u_k q^{p-k}.$$

Démonstration : Soit (v_n) la suite définie de façon explicite par

$$v_n = u_0 q^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

* On a alors :

$$v_0 = u_0 q^0 = u_0 \times 1 = u_0$$

* D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_0 q^{n+1} = v_n = u_0 q^n \times q = qv_n$$

(u_n) et (v_n) possèdent le même terme initial et vérifient la même relation de récurrence. Donc ces deux suites coïncident.

Remarques :
(a) Si k est égal à 0, la formule (2) permet de retrouver la formule (1). Cette dernière est la formule explicite pour une suite géométrique (u_n). En effet, elle donne l'expression de u_n en fonction de n si on connaît le terme initial u_0 et la raison q :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Si le terme initial est de rang 1. On peut aussi écrire :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

(b) La formule

$$u_p = u_k \times q^{p-k}$$

pour une suite géométrique (U_n) permet de calculer le terme de rang p si on connaît le terme de rang k et la raison q. Elle est valide que p soit plus grand ou bien plus petit que k.

Exemples :

(1) Soit la suite (v_n) géométrique de raison 3 telle que v_4 est égal à – 2. On veut calculer v_9. On a alors

$$v_9 = v_4 \times q^{(9-4)} = v_4 \times q^5$$

Donc

$$v_9 = -2 \times 3^5 = -486$$

(2) Soit la suite (w_n) géométrique de raison 5. On sait que w_{12} est égal à 130 et on veut calculer w_8.
On a alors

$$w_8 = w_{12} \times q^{8-12} = w_{12} \times q^{-4}$$

Donc

$$w_8 = 130 \times 5^{-4} = 130 \times \frac{1}{5^4} = \frac{130}{625} = \frac{26}{125}$$

<u>Déterminer si une suite (u_n) est géométrique</u>

...

III.3 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété : Soient q un réel tel que $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Notation : La sommes se note aussi :

$$1 + q + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Démonstration : Notons $S = 1 + q + \cdots + q^n$. On a alors :

$$qS = q(1 + q + \cdots + q^n) = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$$

On en déduit :

$$qS - S = q + q^2 + \cdots + q^{n+1} - (1 + q + \cdots + q^n) = q^{n+1} - 1$$

D'où

$$S(q-1) = q^{n+1} - 1$$

Et donc, pour $q \neq 1$:

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Propriété : On considère (u_n) une suite géométrique de raison q. Soient deux entiers naturels k et p tels que $k < p$. On note S la somme de termes consécutifs de la suite (u_n) définie par

$$S = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_p$$

On a alors

$$S = u_k \frac{q^{p-k+1} - 1}{q - 1}$$

Remarques :
(a) L'expression $p - k + 1$ donne le nombre de termes dans la somme S.
(b) Si $k = 0$ alors on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_p = u_0 \frac{q^{p+1} - 1}{q - 1}$$

Démonstration : D'après la formule de la propriété du III.2, on a pour tout entier naturel n

$$u_n = u_k q^{n-k}$$

On a donc

$$\begin{aligned} S &= u_k + u_{k+1} + \cdots + u_p \\ &= u_k q^{k-k} + u_k q^{k+1-k} + \cdots + u_k q^{p-k} \\ &= u_k + u_k q + \cdots + u_k q^{p-k} \end{aligned}$$

Donc, en factorisant par u_k on obtient :

$$S = u_k(1 + q + \cdots + q^{p-k})$$

Or d'après la propriété précédente, on obtient :

$$1 + q + \cdots + q^{p-k} = \frac{q^{p-k+1} - 1}{q - 1}$$

On en déduit alors

$$S = u_k \frac{q^{p-k+1} - 1}{q - 1}$$

*Exemple : S*oit (a_n) une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de terme initial $a_0 = -2$. On veut calculer la somme des termes consécutifs compris entre le rang 3 et le rang 14 :

$$S = a_3 + a_4 + \cdots + a_{14}$$

La somme S comporte 12 termes car $14 - 3 + 1 = 12$.
D'après la propriété précédente, on a alors

$$S = a_3 \frac{q^{12} - 1}{q - 1}$$

Ici on a $q = \frac{2}{3}$. Calculons a_3 :

$$a_3 = a_0 q^3 = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27}$$

On en déduit donc :

$$S = -\frac{16}{27} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{12} - 1}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$= -\frac{16}{27} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{12} - 1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{16}{27} \times (-3) \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{12} - 1\right)$$

$$= \frac{16}{9}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{12} - 1\right)$$

Finalement on obtient :

$$\boldsymbol{S = -\frac{16}{9}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)}$$

IV Sens de variation et limite d'une suite

IV.1 Etudier le sens de variation d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite numérique.
(1) On dit que la suite (u_n) est **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
(2) On dit que la suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
(3) On dit que la suite (u_n) est **constante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n$.
(4) On dit que la suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : On dira qu'une suite est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$)

b) Sens de variation d'une suite et signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Propriété : Soit (u_n) une suite numérique.
(1) (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
(2) (u_n) est décroisssante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
(3) (u_n) est strictement croisssante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
(4) (u_n) est strictement décroisssante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemples :

...

Sens de variation à partir d'un certain rang

Soit p un entier naturel. On dit que la suite (u_n) est croisssante (resp. décroissante, etc.) **à partir du rang p** si, **pour tout n** $\in \mathbb{N}$ **tel que $n \geq p$**, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$ etc.).

Pour démontrer que (u_n) est croisssante *à partir du rang p* il suffira de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$

...

IV.2 Sens de variation d'une suite définie par une formule explicite

Propriété : Soient (u_n) une suite et f une fonction telles que $[0\,;\,+\infty[\, \subset D_f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
(1) Si la fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur $[p\,;\,+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante (resp. strictement croissante) à partir du rang p.
(2) Si la fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur $[p\,;\,+\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) à partir du rang p.

Démonstration :
(1) On suppose que la fonction f est croissante sur $[p\,;\,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$. On a alors $n + 1 \geq n \geq p$ donc

$$f(n+1) \geq f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

Donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
(2) De même, si on suppose que la fonction f est décroissante sur $[p\,;\,+\infty[$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$. On a $n + 1 \geq n \geq p$ donc

$$f(n+1) \leq f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

Exemple : La suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \sqrt{n}$ est de la forme

$$a_n = f(n)$$

où la fonction f est la fonction racine carrée. La fonction est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc la suite est strictement croissante.

Remarques importantes

(1) La réciproque de cette propriété est fausse. La suite (u_n), définie par la formule $u_n = f(n)$, peut être croissante sans que la fonction f soit croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
(2) Il ne faut pas confondre avec le cas d'une suite *définie par récurrence*. Si la suite (v_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = g(v_n)$, on ne peut pas déduire le sens de variation de la suite (v_n) directement à partir du sens de variation de la fonction g.

IV.3 Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

a) Suites arithmétiques

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
(1) La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
(2) La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
(3) La suite (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Démonstration : Si la suite (u_n) est arithmétique alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
Puisque le signe de $u_{n+1} - u_n$ permet de déterminer le sens de variation de la suite (u_n), on en déduit le sens de variation de la suite (u_n) à partir du signe de la raison r.

b) Suites géométriques

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 *strictement positif*.
* Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
* Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
* Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
* Si $q = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire et égale à 0 à partir du rang 1.
* Si $q < 0$ alors la suite (u_n) est non monotone.

Démonstration :
Les cas $q = 1$ et $q = 0$ sont évidents.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1)$$

avec $u_0 > 0$.
* Si $q > 1$ alors $q - 1 > 0$ et $q^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.
* Si $0 < q < 1$ alors $q - 1 < 0$ et $q^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.
* Si $q < 0$ alors le signe de q^n dépend de la parité de n. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc variable, donc la suite (u_n) est pas monotone.

Remarque très importante : Si le premier terme u_0 est strictement négatif, alors *le sens de variation est inversé*.

Tableau récapitulatif

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	(u_n) strictement croissante	(u_n) strictement décroissante
$0 < q < 1$	(u_n) strictement décroissante	(u_n) strictement croissante
$q < 0$	(u_n) non monotone	

IV.4 Notion de limite d’une suite