Chapitre 3
Dérivation (1)

I Nombre dérivé et tangente à la courbe représentative

Soit f une fonction. On note D_f son ensemble de définition.

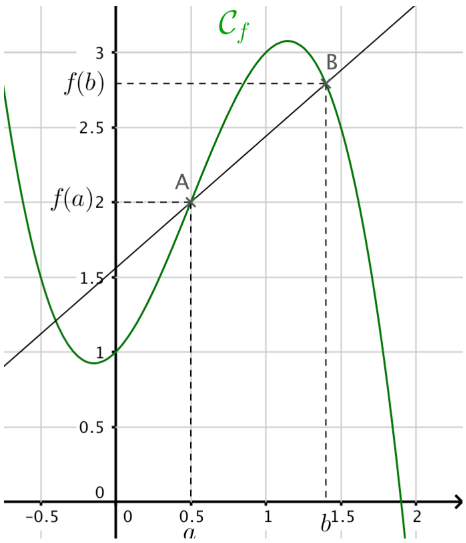
I.1 Taux de variation d'une fonction entre deux valeurs

Définition : Soient a et b deux réels distincts tels que $a \in D_f$, $b \in D_f$. On appelle **taux de variation de la fonction f entre a et b** le nombre réel défini par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque : On vérifie aisement que le taux de variation de f entre a et b est le même que le taux de variation de f entre b et a.

Illustration



Soient A et B les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b. Leurs coordonnées respectives sont $A(a\,;\,f(a))$ et $B(b\,;\,f(b))$.

Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (AB). On dit que cette droite est **la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et B**.

Notation en physique

Le taux de variantion de f entre a et b est le quotient de :

* la variation des ordonnées, $y_B - y_A$ que l'on note parfois en physique Δy

* par la variation des abscisses $x_B - x_A$ que l'on note Δx

En utilisant des notations de physique on le note sous la forme $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Exemples :

1. Calculons

• le taux de variation de la fonction inverse :

entre -11 et -3 entre 2 et 7.

• le taux de variation de la fonction carré :

entre 2 et 5 entre -1 et 3.

2. Déterminer en fonction de x le taux de variation de la fonction carré entre 3 et x (où x est un réel différent de 3) que l'on notera $V_3(x)$.

Propriété : Si la fonction f est une fonction affine alors, pour tout couple de réels $(a\,;\,b)$, le taux de variation entre a et b est égal à son coefficient directeur.

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ est la droite non verticale qui représente la fonction affine f. Les points A et B de coordonnées $(a\,;f(a))$ et $(b\,;f(b))$ appartiennent à cette droite $\mathcal{D}$. Le coefficient directeur m de cette droite $\mathcal{D}$ est donné par la formule apprise en seconde

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est donc égal à m.

Propriété :

(1) Si la fonction f est une fonction croissante (*resp.* strictement croissante) alors le taux de variation de f entre deux valeurs est positif (*resp.* strictement positif).

(2) Si la fonction f est une fonction décroissante (*resp.* strictement décroissante) alors le taux de variation de f entre deux valeurs est négatif (*resp.* strictement négatif).

Démonstration :

(1) Soit f une fonction croissante sur un intervalle I. Soient a et b deux réels distincts de l'intervalle I. On suppose par exemple $a < b$. On a alors puisque f est croissante sur I $f(a) \leq f(b)$. Donc $b - a > 0$ et $f(b) - f(a) \geq 0$. On en déduit par la règle des signes que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

Ainsi le taux de variation est positif.

Si f est strictement croissante sur I, alors $f(a) < f(b)$ donc $f(b) - f(a) > 0$ donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

(2) On fait un raisonnement similaire lorsque f est décroissante sur un intervalle I.

Remarque : Les réciproques sont fausses. Par exemple, si le taux de variation d'une fonction f entre a et b est positif, il est possible que la fonction f ne soit pas croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. Exemple : le taux de variation de la fonction carré entre -1 et 3 est positif mais cette fonction n'est pas croissante sur l'intervalle $[-1\,;3]$.

I.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

• Soit I un intervalle non vide et non ponctuel tel que $I \subset D_f$.

a) Limite d'une fonction en un point

Définition : Soient a un réel tel que a appartient à l'intervalle I ou a est une borne de cet intervalle, et l un réel. On dit que la fonction f **tend vers l lorsque x tend vers a** si, pour tout $x \in D_f$, $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de a.

Dans ce cas on dit que l est la **limite de la fonction f en a** et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x - 48}{x - 3}$$

On veut savoir si la fonction f admet une limite en 3.

1. Montrer que 3 est une racine de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 10x - 48$

2. Déterminer la deuxième racine de g et écrire la fontion g sous forme factorisée.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, on a :

$$f(x) = 2x + 16$$

4. On déduire que la fonction f admet une limite en 3 et déterminer $\lim_{x \to 3} f(x)$.

b) Dérivabilité et nombre dérivé

Définitions : Soit $a \in I$.
(1) On appelle **fonction taux de variation de f en a**, la fonction, notée V_a, définie sur $D_f \setminus \{a\}$ par :

$$V_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(2) On dit que la fonction f est **dérivable en a** si il existe un réel l tel que la fonction V_a tend vers l lorsque x tend vers a.
Dans ce cas, on dit que l est **le nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.

Remarques :
(a) *Pour tout* $x \in D_f \setminus \{a\}$, $V_a(x)$ est donc le taux de variation de f entre a et x.
(b) La fonction f est dérivable en a et admet $f'(a)$ comme nombre dérivé en a si et seulement si on a :

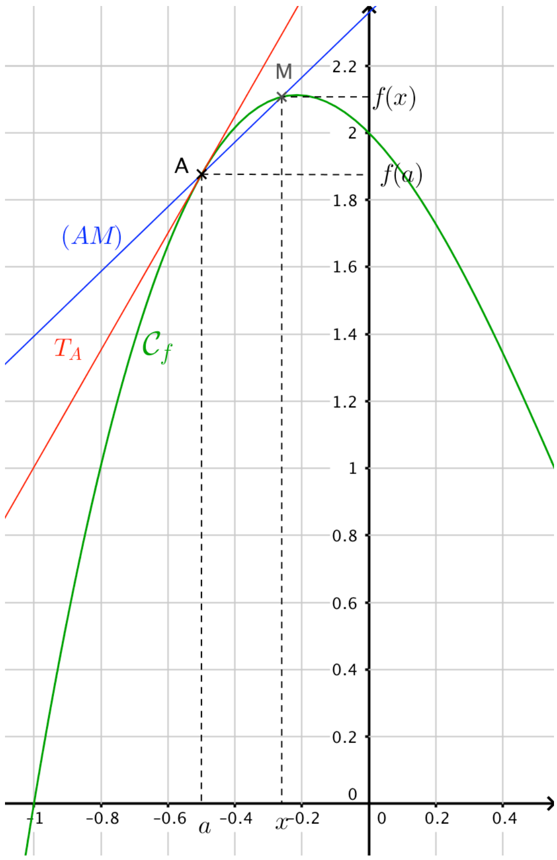
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$V_a(x)$ exprime le taux de variation de la fonction f entre a et x et $f'(a)$ exprime « le taux de variation instantanné » de la fonction f en a.
(c) Si on pose $x = a + h$ on obtient une autre expression du nombre dérivé $f'(a)$: f est dérivable en a et admet $f'(a)$ comme nombre dérivé en a si et seulement si on a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

I.3 Tangente à la courbe C_f en un réel a

a) Interprétation graphique du nombre dérivé



Soient A et M les points de la courbe C_f d'abscisses respectives a et x. Ces points ont donc pour coordonnées respectives $(a\,;f(a))$ et $(x\,;f(x))$. Donc,

$$V_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
est le coefficient directeur de la droite sécante (AM).

Si la fonction f est dérivable en a, alors, lorsque le réel x tend vers a :

* le point M « se rapproche indéfiniment » du point A ;
* la droite (AM) « se rapproche indéfiniment » d'une droite T_A qui passe par le point A.

Puisque $V_a(h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM) et $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} V_a(h)$, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la droite T_A.

b) Définition de la tangente à C_f en a et équation réduite de la tangente

Définition : On suppose que la fonction f est dérivable en a. On appelle **tangente à la courbe C_f en a** la droite non verticale T_a telle que :
* le point A de la courbe C_f d'abscisse a appartient à T_a ;
* et le coefficient directeur de T_a est $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

Propriété : Si la fonction f est dérivable en a, alors l'équation réduite de la tangente T_a à la courbe C_f en a est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration au programme (**) : La droite T_a est non verticale. Son équation réduite est donc de la forme :
$$y = mx + p.$$
* Puisque $f'(a)$ est le coefficient directeur de la droite T_a, on a : $m = f'(a)$ et l'équation de T_a est de la forme :
$$y = f'(a)x + p$$
* Puisque le point A$(a\,; f(a))$ appartient à la droite T_a, il vérifie son équation. Donc on a :
$$f(a) = f'(a) \times a + p$$
D'où :
$$p = -f'(a) \times a + f(a)$$
Finalement l'équation réduite de la droite T_a est :
$$y = f'(a) \times x - f'(a) \times a + f(a)$$
ou encore :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

I.4 Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2x^2 - 5$$
On veut montrer que f est dérivable en -3 et calculer $f'(-3)$.

1. Calculer l'expression de la fonction τ_{-3} définie sur $\mathbb{R}^*$ à partir de la fonction f par l'expression :
$$\tau_{-3}(h) = \frac{f(-3 + h) - f(-3)}{h}$$
2. Montrer que la fonction τ_{-3} possède une limite lorsque h tend vers 0.
3. En déduire que la fonction f est dérivable en -3 et déterminer $f'(-3)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T_{-3} à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -3.

II Fonction dérivée d'une fonction dérivable

Soit une fonction f et un intervalle I, non vide et non réduit à un point, tel que $I \subset D_f$.

II.1 La notion de fonction dérivée

Définitions :
(1) On dit que la fonction f est **dérivable sur l'intervalle I** si, pour tout réel $x \in I$, f est dérivable en x.
(2) Si f est dérivable sur I, alors on appelle **fonction dérivée de f**, la fonction définie sur I et notée f' qui, à tout réel $x \in I$, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Remarque : On généralise cette définition de la façon suivante :

* Si une partie A de $\mathbb{R}$ est formée d'une union d'intervalles non vides et *non ponctuels* et $A \subset D_f$, on dit que f est **dérivable sur A** si f est dérivable sur tout intervalle inclus dans A.
* On dit que la fonction f est **dérivable** si elle est dérivable sur son ensemble de définition.

II.2 Fonctions dérivées pour quelques fontions particulières

a) Les fonctions affines

Propriété : Soit f une fonction affine telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + p$$

où m et p sont deux réels. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = m$$

Démonstration : Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + p$$

où $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.
Soit a un réel. La fonction taux de variation en a est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$ par

$$V_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{mx + p - (ma + p)}{x - a} = \frac{m(x - a)}{x - a} = m$$

On a donc

$$\lim_{x \to a} V_a(x) = \lim_{x \to a} m = m$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = m$

Remarque : La fonction dérivée d'une fonction affine est donc une fonction constante.

Deux cas particuliers

• Les fonctions constantes

Si f est une fonction constante, c'est-à-dire si il existe un réel m tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = m$$

f est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à 0. La fonction dérivée de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 0$$

Il s'agit de la **fonction nulle**.

• La fonction identité

On appelle la **fonction identité** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x$$

Il s'agit d'une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Sa fonction dérivée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 1$. Il s'agit de la **fonction unité**.

b) La fonction carré et la fonction cube

Propriété : La fonction carré est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 2x$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, le taux de variation de la fonction carré entre a et x est donné par l'expression :

$$V_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$$

On a donc

$$\lim_{x \to a} V_a(x) = \lim_{x \to a} x + a = 2a$$

La fonction carré est donc dérivable en a et son nombre dérivé en a est :

$$f'(a) = 2a$$

Propriété : La fonction cube est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 3x^2$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, le taux de variation de la fonction cube entre a et x est donné par l'expression :

$$V_a(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x-a} = x^2 + ax + a^2$$

On a donc

$$\lim_{x \to a} V_a(x) = \lim_{x \to a} x^2 + ax + a^2 = 3a^2$$

La fonction carré est donc dérivable en a et son nombre dérivé en a est :

$$f'(a) = 3a^2$$

c) La fonction inverse

Propriété : La fonction inverse est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*\backslash\{a\}$, le taux de variation de la fonction inverse entre a et x est donné par l'expression :

$$V_a(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = \frac{a-x}{ax} \times \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{ax}$$

On a alors

$$\lim_{x \to a} V_a(x) = \lim_{x \to a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$$

La fonction inverse est donc dérivable en a et son nombre dérivé en a est :

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

d) La fonction racine carrée

Propriété :
(1) La fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Démonstrations :
(1) Soit $a\in\,]0\,;\,+\infty[$. Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[\backslash\{a\}$, le taux de variation de la fonction racine carrée entre a et x est donné par l'expression :

$$V_a(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

On a donc

$$\lim_{x\to a}V_a(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

La fonction racine carrée est donc dérivable en a et son nombre dérivé en a est :

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(2) Montrons de plus que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, le taux de variation de la fonction racine carrée entre 0 et x est donné par l'expression :

$$V_0(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0}V_0(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Donc, la fonction V_0 ne tend pas vers une valeur *finie* lorsque x tend vers 0. On en déduit que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

II.3 Un tableau récapitulatif

ensemble de définition	fonction f	dérivable sur	fonction dérivée f'
$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=mx+p$ $m\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$
$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$D_f=\,]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$D_f=[0\,;\,+\infty[$	$f(x)=\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

II.4 Opérations et fonctions dérivées

a) Somme de deux fonctions

Propriété : Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $f+g$ est dérivable et pour tout $x \in I$, on a :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Démonstration : Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
Puisque f et g sont dérivables en a, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a)$$

Calculons la fonction taux de variation de la fonction $f+g$ en a :

$$\begin{aligned} V_a(h) &= \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-f(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} V_a(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

La fonction $f+g$ est donc dérivable en a et on a :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Exemples :

…

b) Produit d'une fonction par un réel

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel. Alors la fonction kf est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(kf)'(x) = k \times f'(x)$$

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I et k un réel. Notons g la fonction kf, c'est-à-dire la fonction définie sur I par $g(x) = k \times f(x)$.
Soit $a \in I$. Puisque f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Calculons la fonction taux de variation de la fonction g en a :

$$\begin{aligned} V_a(h) &= \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{k \times f(a+h) - k \times f(a)}{h} \\ &= \frac{k(f(a+h)-f(a))}{h} = k \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} V_a(h) &= \lim_{h\to 0} k \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= k \times \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k \times f'(a) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction g est dérivable en a et on a :

$$g'(a) = (kf)'(a) = k \times f'(a)$$

Exemple :

…

c) Opposée d'une fonction et différence de deux fonctions

On déduit de ces deux propriétés que si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

* les fonctions $-f$ et $f-g$ sont dérivables sur I
* et pour tout $x \in I$

$$(-f)'(x) = -f'(x)$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

En effet,

$$-f = -1 \times f \text{ et } f - g = f + (-f).$$

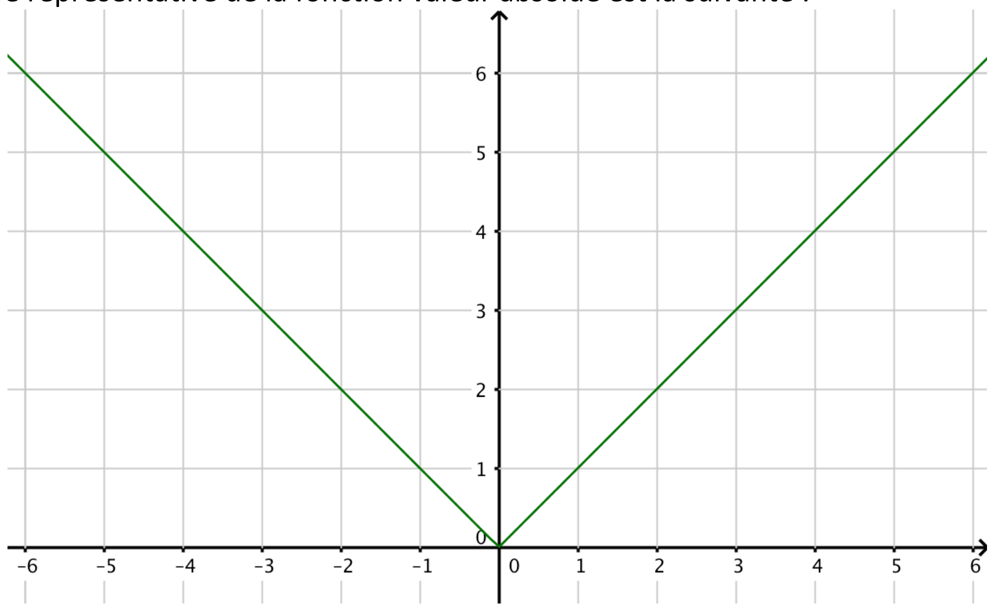
II.4 Etude de la fonction valeur absolue

Définition :
(1) Soit x un réel. On appelle **valeur absolue de x** le réel noté $|x|$ tel que :
* $|x| = x$ si $x \geq 0$;
* $|x| = -x$ si $x < 0$.
(2) On appelle **fonction valeur absolue** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel associe sa valeur absolue $|x|$.

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$.

Courbe représentative de la fonction valeur absolue

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la suivante :



Etude de la dérivabilité de la fonction valeur absolue

Etudions la dérivabilité de la fonction valeur absolue en un réel a. Nous noterons v cette fonction.

• <u>1^er cas :</u> $a > 0$

On veut étudier la limite quand x tend vers a de $V_a(x)$, le taux de variation de la fonction valeur absolue entre a et x. Pour x suffisamment proche de a, on a $x > 0$. On a alors

$$V_a(x) = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x \to a} V_a(x) = 1$. Ainsi la fonction valeur absolue v est dérivable en a et

$$v'(a) = 1$$

• <u>2^{me} cas :</u> $a < 0$

On veut étudier la limite quand x tend vers a de $V_a(x)$, le taux de variation de la fonction valeur absolue entre a et x. Pour x suffisamment proche de a on a $x < 0$. On a alors

$$V_a(x) = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{-x - (-a)}{x - a} = \frac{-(x - a)}{x - a} = -1$$

Donc $\lim\limits_{x \to a} V_a(x) = -1$. Ainsi la fonction valeur absolue v est dérivable en a et

$$v'(a) = -1$$

• <u>3^{me} cas :</u> $a = 0$

On veut étudier la limite quand x tend vers 0 de V_0la fonction taux de variation de la fonction valeur absolue entre 0 et x.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V_0(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

On doit distinguer le cas où $x > 0$ et celui où $x < 0$.

* Si $x > 0$

$$V_0(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

* Si $x < 0$

$$V_0(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

On voit alors que la fonction $V_0(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, car cette fonction prend des valeurs fixes et différentes selon que $x < 0$ ou que $x > 0$. Ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

On déduit de cette étude de dérivabilité, la propriété suivante :

Propriété :

(1) La fonction valeur absolue (notée ici v) est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

* $v'(x) = 1$ si $x > 0$;
* $v'(x) = -1$ si $x < 0$

(2) La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.