Chapitre 1
Fonction polynômes du second degré

I Définition et forme développée d'un polynôme du second degré

I.1 La définition et l'unité des coefficients

Définition : On dit qu'une fonction f est une **fonction polynôme du second degré** si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe trois réels a, b et c, où $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dans ce cas, on dit que :
* l'expression $ax^2 + bx + c$ est **la forme développée** de la fonction f ;
* les réels a, b et c sont **les coefficients** de cette fonction ;
* le coefficient a est **le coefficient dominant** de la fonction f.

Une remarque importante

Si $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ sont deux triplets de réels tels que, *pour tout réel* x, on a :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

Alors on peut en déduire les trois égalités suivantes :

$$a = a',\ b = b' \text{ et } c = c'$$

Démonstration : Soient deux triplets de réels $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ tels que pour tout réel x on a :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

* pour $x = 0$, on en déduit :

$$a \times 0^2 + b \times 0 + c = a' \times 0^2 + b' \times 0 + c' \Leftrightarrow c = c'$$

* pour $x = 1$, on en déduit :

$$a \times 1^2 + b \times 1 + c = a' \times 1^2 + b' \times 1 + c' \Leftrightarrow a + b + c = a' + b' + c'$$

* pour $x = -1$, on en déduit :

$$a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a' \times (-1)^2 + b' \times (-1) + c' \Leftrightarrow a - b + c = a' - b' + c'$$

A partir du système d'égalité

$$\begin{cases} c = c' \\ a + b + c = a' + b' + c' \\ a - b + c = a' - b' + c' \end{cases}$$

on déduit le système

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

Cette propriété a deux conséquences :

Propriété :
(1) Aucune fonction affine n'est une fonction polynôme du second degré.
(2) Si la fonction f est une fonction polynôme du second degré alors il n'existe qu'un seul triplet de coefficients $(a; b; c)$ associé à f.

Remarque : Une fonction polynôme du second degré n'a donc qu'une seule forme développée et qu'un seul coefficient dominant.

I.2 Exemples de fonctions polynôme du second degré

a) Montrer que la fonction carré $x \rightarrow x^2$ est un polynôme du second degré et déterminer ses coefficients.
b) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (3x - 4)^2 - 5x^2$$

est-elle un polynôme du second degré ? Si oui, quels sont ses coefficients ?

c) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (3x - 4)^2 - 9x^2$$

est-elle un polynôme du second degré ?

...

I.3 Racine d'une fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle **racine** d'une fonction polynôme du second degré f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque : Si la fonction f a pour forme développée

$$ax^2 + bx + c$$

alors les racines de la fonction f sont les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemple : On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 + 11x + 8$$

Les nombres suivants 1 ; -1 ; -2 et $-\frac{8}{3}$ sont-ils des racines du polynôme f ?

...

II Fonction polynôme du second degré sous forme factorisée

II.1 Forme factorisée et racine d'une fonction polynôme du second degré

Propriété : Soient trois réels a, x_1 et x_2, où a est non nul, et une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(1) La fonction f est une fonction polynôme du second degré.
On dit alors que l'expression $a(x - x_1)(x - x_2)$ est **la forme factorisée** de cette fonction.
(2) Les réels x_1 et x_2 sont les uniques racines de la fonction f.

Démonstration :
(1) En développant l'expression $a(x - x_1)(x - x_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

En posant $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$, on a bien

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donc f est bien une fonction polynôme du second degré.
(2) Résolvons l'équation $f(x) = 0$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0 \end{aligned}$$

par la propriété des produits nuls.
Or $a \neq 0$ donc

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

Donc x_1 et x_2 sont les deux uniques solutions de l'équation $f(x) = 0$. Autrement dit, ce sont les uniques racines de f.

<u>Un cas particulier</u>

Dans le cas où on a $x_1 = x_2$, alors la forme factorisée de la fonction f est :

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

et le réel x_1 est l'unique racine de la fonction f.

Exemples : Déterminer les racines des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = -4(x+7)\left(x - \frac{2}{3}\right)$
- $f_2(x) = -(x+5)^2$
- $f_3(x) = 5x(x+7)$

...

Remarque : Attention, une fonction polynôme du second degré ne possède pas toujours une forme factorisée.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 8$$

a) Démontrer que cette fonction est un polynôme du second degré qui ne possède pas de racine

b) En déduire que ce polynôme du second degré ne possède pas de forme factorisée.

...

II.2 Étude du signe d'une fonction polynôme du second degré à partir de sa forme factorisée

III Forme canonique d'un polynôme du second degré

III.1 Existence et unicité de la forme canonique

Soit f une fonction polynôme du second degré de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Propriété :
(1) Il existe un unique couple de réels $(a'; \alpha\ ;\ \beta)$ tel que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = a'(x-\alpha)^2 + \beta.$$

On dit que cette expression est **la forme canonique** de la fonction f.
(2) Le triplet de réels $(a'; \alpha\ ;\ \beta)$ vérifie les égalités suivantes :

$$a' = a$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Démonstration :
(1) Existence du triplet $(a'; \alpha\ ;\ \beta)$
Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a'(x-\alpha)^2 + \beta$ où

$$a' = a\ ;\ \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

On a alors pour tout réel x

$$g(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

En développant et en réduisant cette expression, on obtient alors

$$g(x) = ax^2 + bx + c = f(x)$$

Donc $f(x) = a'(x-\alpha)^2 + \beta$
(2) Unicité du triplet $(a'; \alpha\ ;\ \beta)$:
Supposons d'existence d'un triple de réels $(a'; \alpha\ ;\ \beta)$ tel que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = a'(x-\alpha)^2 + \beta$$

En développant cette expression, on en déduit l'expression

$$f(x) = a'x^2 - 2a'\alpha x + a'\alpha^2 + \beta$$

Or par définition on a aussi $f(x) = ax^2 + bx + c$
Donc par unicité des coefficients d'un polynôme du second degré, on en déduit :

$$\begin{cases} a = a' \\ b = -2a'\alpha \\ c = a'\alpha^2 + \beta \end{cases}$$

On en déduit alors de proche en proche

$$\begin{cases} a' = a \\ \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$

Enfin, on a aussi :

$$f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = 0 + \beta = \beta$$

Remarque : Si on introduit la notation suivante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On peut alors écrire :

$$\beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemples :

...

III.2 Déterminer la forme canonique à partir de la forme développée

III.3 Forme canonique et tableau de variation

Propriété : Soit une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est la suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où a, α et β sont trois réels et $a \neq 0$.
* Si $a > 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.
* Si $a < 0$, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\ ; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variations

Puisque que, d'après la propriété du III.1, on a $\beta = f(\alpha)$, on en déduit les deux cas suivants :

* Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

* Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

III.4 Courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est :

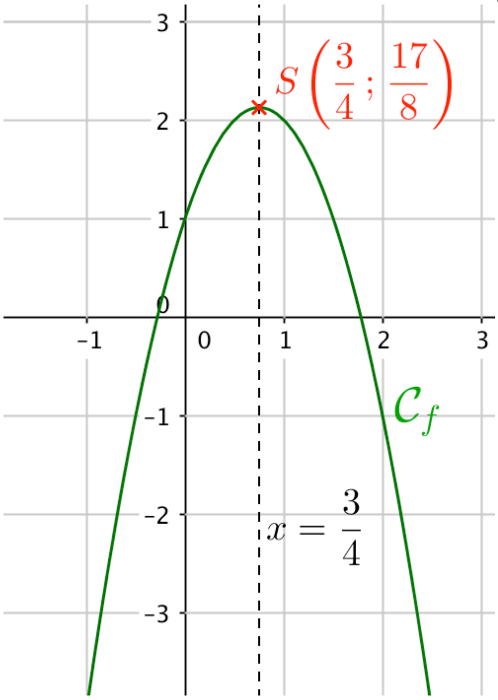
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où a, α et β sont trois réels et $a \neq 0$.

Définitions :
(1) La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal donné est une **parabole**.
(2) * Si $a > 0$, on dit que la parabole est **tournée vers le haut**.
* Si $a < 0$, on dit que la parabole est **tournée vers bas**.
(3) On dit que le point S de coordonnées $(\alpha ; \beta)$ est le **sommet de la parabole**.

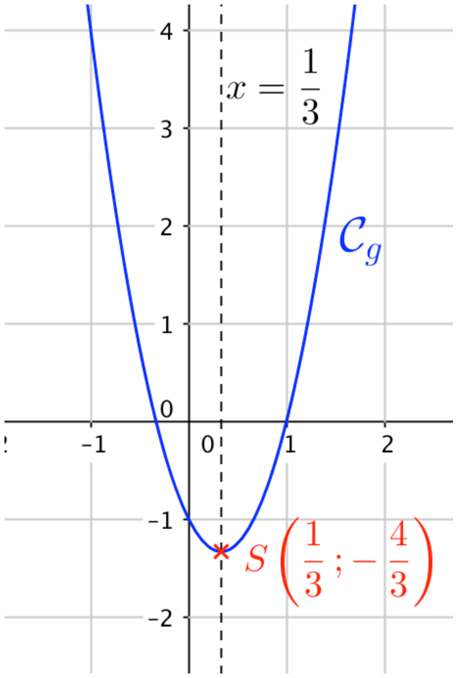
Propriété : La parabole qui représente f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Illustration



$f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$

$a = -2 < 0$ la parabole est tournée vers le bas



$g(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$

$a = 3 > 0$ la parabole est tournée vers le haut

IV Méthode générale de résolution des équations et inéquations du second degré

On veut résoudre une équation du second degré, c'est-à-dire une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$.

On considère une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Résoudre cette équation équivaut à déterminer les racines de la fonction f.

Quelques questions à résoudre :

* un polynôme du 2nd degré peut-il avoir plus de deux racines ?
* un polynôme du 2nd degré peut-il n'avoir aucune racine ?
* peut-on toujours écrire d'un polynôme du 2nd degré sous une forme factorisée ?
* si on connaît les racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues) d'un polynôme du 2nd degré peut-on toujours l'écrire sous la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$?

IV.1 Le théorème fondamental

a) Énoncé et démonstration du théorème

Définition : On appelle **discriminant** de la fonction f le réel Δ tel que

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Remarque : On dit aussi que Δ est le **discriminant de l'équation** du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Théorème: On distingue différents cas selon la valeur du discriminant Δ.

(1) Si $\Delta > 0$ alors la fonction f s'écrit sous forme factorisée suivante :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

x_1 et x_1 sont alors les deux uniques racines de la fonction f.

(2) Si $\Delta = 0$, alors la fonction f s'écrit sous forme factorisée suivante :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

x_0 est alors l'unique racine de la fonction f. On dit alors que x_0 est la **racine double** de la fonction f.

(3) Si $\Delta < 0$ alors la fonction f ne peut pas s'écrire sous forme factorisée et elle n'a pas de racine.

Démonstration : Nous avons vu précédemment que $f(x) = a(x - \propto)^2 + \beta$ avec

$$\propto = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\propto) = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

En substituant $\propto$ et β par leur expression, on peut donc écrire

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

* Si $\Delta > 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

On peut donc écrire :

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

A l'aide d'une identité remarquable, on peut factoriser cette expression :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

En posant $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on a alors :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Et x_1 et x_2 sont donc les deux uniques racines de f.

• Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

En posant $x_0 = -\frac{b}{2a}$, on a donc

$$f(x) = a(x-x_0)^2$$

Et x_0 est donc l'unique racine de f.

• Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Or, pour tout réel x, on a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Donc

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

Or $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

D'où $f(x) < 0$ si $a < 0$ si et $f(x) > 0$ si $a > 0$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

b) Trois exemples d'application du théorème

(a) Résolvons l'équation :

$$-x^2 - 4x + 21 = 0$$

...

(b) Résolvons l'équation :

$$2x^2 - 16x + 32 = 0$$

...

(c) Résolvons l'équation :

$$4x^2 + 2x + 3 = 0$$

...

c) Réponses aux questions posées au début de la partie II.1

Le théorème permet de donner les réponses suivantes :

* un polynôme du 2nd degré peut-il avoir plus de deux racines ? non
* un polynôme du 2nd degré peut-il n'avoir aucune racine ? oui
* peut-on toujours écrire d'un polynôme du 2nd degré sous la forme factorisée ? non
* si on connaît les racines x_1 et x_2 d'un polynôme du 2nd degré peut-on toujours l'écrire sous la forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$? oui

IV.2 Relation entre racines et coefficients

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme développée est :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \neq 0$.

Propriété :

(1) Si x_1 et x_2 sont deux racines distinctes de la fonction f alors on a les deux égalités suivantes :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

(2) Si x_0 est l'unique racine de f alors on a les deux égalités suivantes :

$$2x_0 = -\frac{b}{a} \text{ et } {x_0}^2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration :

(1) Nous avons vu que si x_1 et x_2 sont deux racines de la fonction f alors la forme factorisée de f est la suivante :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

En développant cette expression, on obtient alors :

$$f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Par identification des coefficients, on en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases}$$

D'où on déduit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

(2) En reprenant ces deux égalités avec $x_0 = x_1 = x_2$, on en déduit

$$\begin{cases} 2x_0 = -\dfrac{b}{a} \\ {x_0}^2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Remarque : Si on connaît une première racine d'un polynôme du second degré f, nous pouvons utiliser l'une de ces deux égalités pour déterminer la deuxième racine de f (distincte ou identique). Par exemple, considérons la fonction

$$f(x) = 3x^2 + 9x - 30$$

a) Vérifier que 2 est une racine de la fonction f.

b) En déduire la deuxième racine à l'aide d'une des deux relations entre racines et coefficients.

...

IV.3 Étude du signe d'une fonction polynôme du second degré

a) Énoncé de la propriété

Propriété : Soient f une fonction polynôme du second degré et son discriminant Δ.
(1) Si $\Delta > 0$ alors le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

(2) Si $\Delta = 0$ alors le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

(3) Si $\Delta < 0$ alors le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	

Démonstration : ...

b) Trois exemples d'application de la propriété

(a) Résolvons l'inéquation :

$$3x^2 + 2x - 10 > 0$$

...

(b) Résolvons l'inéquation

$$-x^2 + 5x - 20 > 0$$

...

(c) Résolvons l'inéquation

$$4x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9} \leq 0$$

...

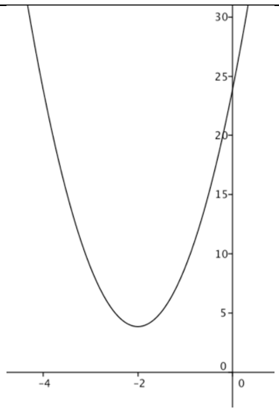
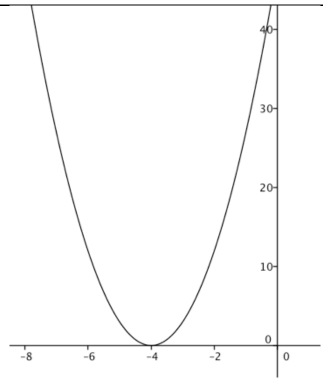
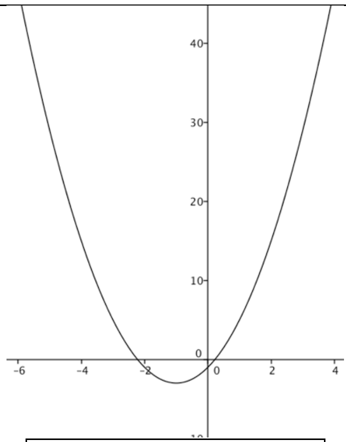
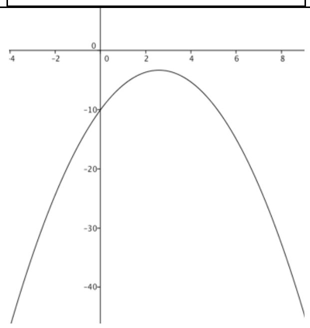
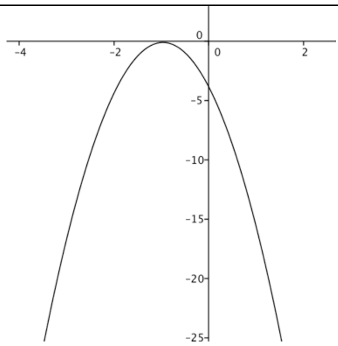
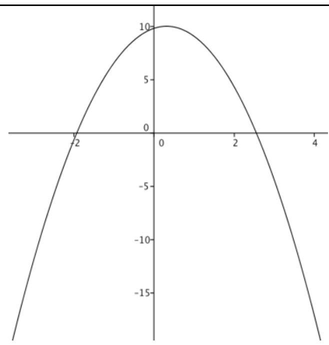
IV.4 Un tableau récapitulatif à partir de la courbe représentative

On distingue six situations différentes selon :

* le signe du coefficient a ;
* la valeur du discriminant Δ.

On obtient alors dans chaque cas :

* un schéma de la position de la courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses ;
* le tableau de signes correspondant

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Remarque : On a $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ donc :

* si $\Delta > 0$, alors a et β sont de signes contraires ;
* si $\Delta < 0$, alors a et β sont de même signes.
* si $\Delta = 0$, alors $\beta = 0$.