Chapitre 0
Quelques rappels sur le calcul littéral,
les équations et les inéquations

I Formules de calcul littéral, développer et factoriser

I.1 Distributivité et identités remarquables

Propriété : Soient a, b et c trois réels. Alors on a :

$$a(b+c) = ab + ac$$

Cette propriété s'appelle la **distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**.

Remarques :

* On sait que $b - c = b + (-c)$. On en déduit la **distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction** :

$$a(b-c) = ab - ac$$

* On sait que, si $a \neq 0$,pour tout réel b, $\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$ on en déduit aussi les égalités suivantes :

$$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \text{ et } \frac{b-c}{a} = \frac{b}{a} - \frac{c}{a}$$

Propriété (double distributivité) : Soient a, b, c et d quatre réels. On a l'égalité :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Remarque : On en déduit de la même façon :

* $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$
* $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$

Propriétés : Soient a et b deux réels. Alors on a les trois égalités suivantes :

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ces trois égalités s'appellent **les identités remarquables**.

I.2 Vocabulaire : développer et factoriser

On a le schéma suivant :

développer

------------->

$$a(b+c) = ab + ac$$
$$a(b-c) = ab - ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

<-------------

factoriser

II Équations

II.1 Résoudre une équation du premier degré

a) Définition

Définition : Une **équation du premier degré** à une inconnue x est une équation qui est équivalente à une équation de la forme :

$$ax = b$$

où a et b sont deux réels quelconques et a est non nul.

b) Un exemple de résolution

On veut résoudre l'équation

$$3(x-2)-1=-2(x+4)$$

On a les équivalences suivantes :

Résolution	*Commentaires*
$3(x-2)-1=-2(x+4)$	(A) On développe et on réduit chaque membre de l'équation.
<=> $3x-6-1=-2x-8$	
<=> $3x-7=-2x-8$	(B) On regroupe les "termes en x" et les "termes constants" de chaque côté du signe '='
<=> $3x+2x=-8+7$	
<=> $5x=-1$	(C) On réduit les deux membres pour obtenir une équation de la forme $ax=b$
<=> $x=-\frac{1}{5}$	
D'où $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	(D) On divise chaque membre par a : ici, $a=5$

II.2 Résoudre une équation produit nul

a) Propriété du produit nul et définition d'une équation produit nul

Propriété (du produit nul) : Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Remarque : Autrement dit, si A et B sont deux réels, on a l'équivalence suivante :

$$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ } ou \text{ } B=0$$

Définition : On appelle une **équation produit nul** toute équation de la forme :

$$(ax+b)(cx+d)=0$$

où a, b, c et d sont quatre réels et a et c sont non nuls.

b) Un exemple de résolution

On veut résoudre l'équation suivante :

$$(4x+7)(2x-1)=0$$

D'après le théorème du produit nul, on a :

$(4x+7)(2x-1)=0$ si et seulement si $4x+7=0$ ou $2x-1=0$

Résolvons ces deux équations du 1er degré

• $4x+7=0 \Leftrightarrow 4x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$

• $2x-1=0$ <=> $2x=1$ <=> $x=\frac{1}{2}$

L'ensemble des solutions est donc $S=\left\{-\frac{7}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$.

III Inéquations

III.1 Règles sur les inégalités

Propriétés : Soit a et b deux réels.
(1) Si $a < b$ alors, pour tout réel k, on a :

$$a + k < b + k.$$

(2) Si $a < b$ alors
* Pour tout réel k tel que $k > 0$, on a :

$$ka < kb$$

* Pour tout réel k tel que $k < 0$, on a :

$$ka > kb$$

Remarque : Dans la propriété (1), le réel k peut aussi bien être négatif que positif.

Propriété (règle d'addition des inégalités) : Si a, b, c et d sont quatre réels tels que :

$$a < b \text{ et } c < d$$

Alors on a :

$$a + c < b + d$$

III.2 Résoudre une inéquation du premier degré

a) Notion d'inéquation du premier degré

Définition : Une **inéquation du premier degré** (à une inconnue) est une inéquation qui est équivalente à une inéquation de la forme :

$$ax + b \geq 0 \text{ ou } ax + b > 0$$

où a et b sont deux réels et a est non nul.

Remarque : Si l'inéquation est équivalente à une inéquation de la forme $a'x + b' \leq 0$ ou $a'x + b' < 0$ alors elle est aussi du premier degré.

b) Un exemple de résolution

Résolvons l'inéquation $6(x - 5) < -9(2 - x)$
On a les équivalences suivantes :

$$6(x - 5) < -9(2 - x)$$
$$\Leftrightarrow 6x - 30 < -18 + 9x$$
$$\Leftrightarrow 6x - 9x < -18 + 30$$
$$\Leftrightarrow -3x < 12$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{12}{-3}$$
$$\Leftrightarrow x > -4$$

Finalement on a l'ensemble de solutions suivant :

$$\boldsymbol{S} =]\boldsymbol{-4}\,;\, +\infty[$$

III.4 Résoudre des inéquations produits par tableau de signes

a) Rappels sur la règle des signes

Propriété : Soit deux réels A et B.
(1) Le produit AB est nul si et seulement si A est nul ou B est nul.
(2) Le produit AB est strictement positif si et seulement si A et B sont non nuls et de même signe.
(3) Le produit AB est strictement négatif si et seulement si A et B sont non nuls et de signes opposés.

Remarque : Il n'y a pas de règle des signes pour l'addition ou la soustraction : la connaissance du signe de A et du signe de B ne permet pas d'en déduire le signe de $A+B$ ou le signe de $A-B$ dans tous les cas.

b) Dresser le tableau de signes d'un produit d'expressions du premier degré

On veut dresser le tableau de signes de la fonction f suivante :

$$f(x) = (4x+5)(-3x+7)$$

(1)

* Résolvons l'équation $4x+5=0$:

$$4x+5=0 \iff 4x=-5$$
$$\iff x=-\frac{5}{4}$$

* Résolvons l'équation $-3x+7=0$:

$$-3x+7=0 \iff -3x=-7 \iff x=\frac{-7}{-3}$$
$$\iff x=\frac{7}{3}$$

(2) On peut donc tracer le tableau de signes suivant :

On remarque que l'on a $-\frac{5}{4}<\frac{7}{3}$. Donc, dans la première ligne du tableau de signes, $-\frac{5}{4}$ sera placé à gauche de $\frac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
signe de $4x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-3x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(4x+5)(-3x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque : la dernière ligne du tableau est déduite de la règle des signes pour un produit.

c) Résoudre une inéquation-produit

On veut résoudre l'inéquation suivante :

$$(4x+5)(-3x+7)>0$$

Par simple lecture du tableau de signes précédent, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\boldsymbol{S}=\left]-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\,;\,\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right[$$

Remarque : Avec le même tableau de signes, on peut aussi résoudre les inéquations suivantes :

$$(4x+5)(-3x+7)<0 \text{ ou } (4x+5)(-3x+7)\geq 0 \text{ ou } (4x+5)(-3x+7)\leq 0$$

IV La fonction carré

IV.1 Définition et tableau de variations de la fonction carré

Définition : On appelle **fonction carré** la fonction qui, à tout réel x, associe son carré x^2.

Propriété : La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Remarque : Autrement dit, si a et b sont deux réels, on a :

* Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$.
* Si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$.

Tableau de variations

Le tableau de variations de la fonction carrée est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de la fonction carré		↘	0	↗	

IV.2 Notion de fonction paire et courbe représentative de la fonction carré

a) Notion de fonction paire

Définition : On dit qu'une fonction f est **paire** si, pour tout $x \in D$,

$-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$

Propriété : Si une fonction f est paire alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Courbe représentative de la fonction carré

Propriétés :

(1 Pour tout réel x, on a :

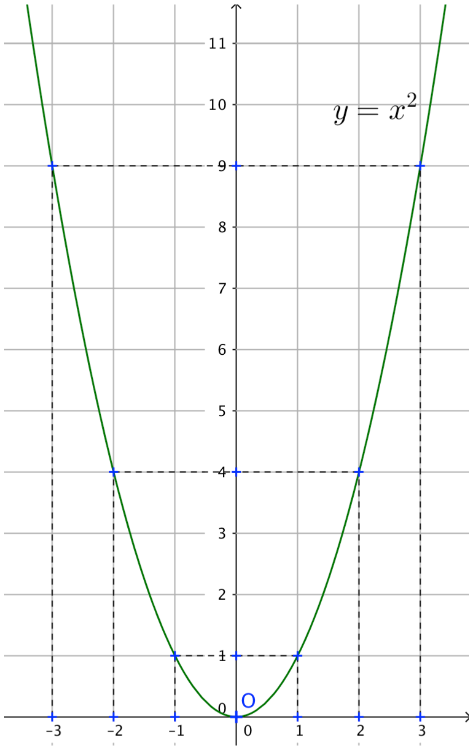
$$(-x)^2 = x^2.$$

La fonction carré est donc paire

(2) La courbe représentative de la fonction carré dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction carré dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ est la suivante :



On dit que cette courbe est une **parabole de sommet O**.

V La fonction racine carrée

V.1 Rappels sur la racine carrée d'un réel positif

Définition : Soit un nombre réel positif x. La **racine carrée** de x est le nombre positif dont le carré est égale à x. Elle est notée $\sqrt{x}$.

Remarques :

(a) La notation $\sqrt{x}$ a un sens *seulement si* $x \geq 0$.

(b) Par définition, on a donc : pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}^2 = x$.

(c) En revanche, l'expression $\sqrt{x^2}$ a un sens *même si* x est négatif, puisque, pour tout réel x, x^2 est un réel positif. Dans ce cas, on a :

* si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2} = x$;

* si $x < 0$ alors $\sqrt{x^2} = -x$.

On dit que $\sqrt{x^2}$ est égal à la **valeur absolue de x** et on note $\sqrt{x^2} = |x|$

(d) Si $x > 0$ alors $\sqrt{x} > 0$.

Propriétés : Soient a et b deux réels positifs.

(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(2) Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Remarque : $\sqrt{a+b}^2 = a + b$

mais $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ donc

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

sauf si $a = 0$ ou $b = 0$.

V.2 La fonction racine carrée

Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ qui, à tout réel positif x, associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

Remarque : Autrement dit, si f est la fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Remarque : Autrement dit, si a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ est la suivante :